Преподаватель: Мельник Николай Иосифович
Конспект студентов гр. 951004(5):

Моделирование
и
диалоговые игры

Моделирование – замещение одного объекта (оригинала) другим, моделью и фиксация (изучение) свойств оригинала, путем исследования свойств модели.

2 условия:

1. Если модель адекватно отображает свойства объекта, значимые с точки зрения цели исследования.
2. Если модель позволяет устранить проблемы, возможные при измерении на реальных объектах.

2 основных метода моделирования:

1. Классический (индуктивный) – исследует систему, переходя от частного к общему.
2. Системный – от общего к частному. Основа – цель исследования.

Подобие модели реальному объекту является не целью, а условием правильного функционирования модели.

Основные принципы моделирования:

1. Принцип информационной достаточности.
2. Принцип осуществимости. Модель должна помочь достичь цели с вероятностью отличной от 0 за приемлемое время.
3. Множественность модели.
4. Принцип агрегирования. Совокупность подсистем. Целесообразно использовать типовые математические модели.
5. Принцип параметризации.

Классификация методов моделирования:

По характеру изучаемых вопросов:

1. Детерминированные модели. Предполагается, что при функционировании моделирования объекта нет вероятностных факторов.
2. Стохастическая. Предполагается наличие случайных параметров, характеризующих внутреннюю структуру модели, а также внешних.

По принципу развития во времени:

1. Статические. Исследование производится в конкретный момент времени.
2. Динамические. Описываются развитием процессов в объекте во времени.

По представлению информации в объекте:

1. Дискретные.
2. Непрерывные.

От формы существования модели:

1. Мысленные.
2. Реальные.
   - Натурное. Исследование на самом реальном объекте.
   - Физическое. Эксперимент на специальных установках, процессы в которых подобны процессам в реальных системах.

Мысленные модели используются, если объект существует в форме, не допускающей исследование.

Модели бывают:

1. ***Наглядные.***
   - Гипотетические.
   - Аналоговые.

   Если информации об объекте мало, то используются гипотезы. При аналоговом моделировании применяются аналоги различных уровней (т.е. такой объект аналогичен такому-то).
2. ***Символическое моделирование.***
   - Знаковое. Вводят условные обозначения – знаки – для представления некоторых объектов и операций, которые можно производить над ними (например, множество и пересечение множеств).
   - Языковое. В основе лежит тезаурус – словарь, лишенный неоднозначности, каждому слову соответствует только одно значение.
3. ***Математические модели.***
   - Аналитические. Система функционирования описывается с помощью ее функциональных отношений. Исследовать аналитические модели можно различными способами:
     a. Аналитическое исследование – получают в явном виде зависимости для определенных характеристических параметров.
     b. Численные методы исследования – получают частные результаты при конкретных начальных условиях.
     c. Качественные методы исследования – не имея в явном виде решения можно, используя эти методы получить информацию о свойствах решения.

- Импликационные. Реализуется модель в виде программного алгоритма, который позволяет воспроизвести поведение объекта во времени.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В общем случае при построении математической модели должны учитываться следующие множества факторов:

1. Множества входных воздействий $x_i \in X$.
2. Воздействия внешней среды $v_j \in V$.
3. Внутренние параметры $h_k \in H$.
4. Множества выходных характеристик $y_s \in Y$.

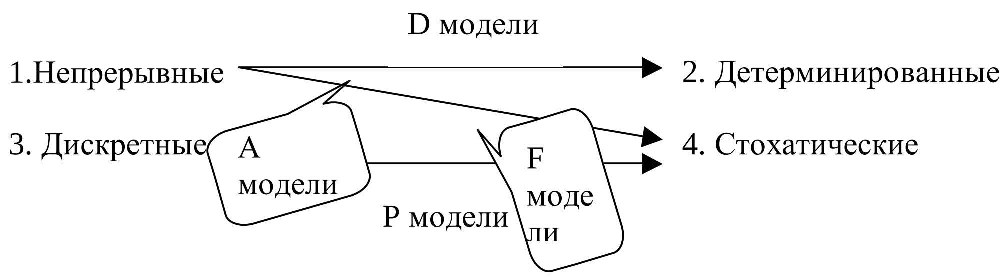
Первые 3 фактора независимы (экзогенные), а последний зависимый (эндогенный).

Процесс функционирования объекта во времени в математической модели вписывется, как некоторая функция.

$\vec{y} = F(X, V, H, t)$. Параметр t для статистических моделей отсутствует. При этом предполагается, что воздействия могут меняться во времени $x_i(t), v_j(t), h_k(t)$.

ТИПОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Любые модели могут быть:



D-модели – описание объектов с помощью этих моделей осуществляется с помощью системы дифференциальных уравнений. Они используются для исследования систем автоматического управления и автоматического регулирования. В особенности для устойчивости этих систем.

F-модели – используются при представлении модели (Finita automat) функционирования. Используются:

- Конечный автомат.
- Множество воздействий Z.
- Множество входных сигналов x.
- Множество выходных сигналов y.

Взаимодействия осуществляются при помощи функций переходов: $z(t_{i+1}) = F(x(t_i), z(t_i))$. Переход зависит от того состояния, в котором находится автомат $y(t_i) = \Phi(x(t_i), z(t_i))$. Широко используются автоматы Мура и Мили.

P-модели – вероятностный автомат. Задан вероятностный автомат, если заданы следующие распределения вероятности:

z	z_1	z_2	…	z_{n-1}	z_n
(z_i,x_j)	p_1	p_2	…	p_{n-1}	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Задает вероятности переходов в одно из состояний z при наличии входных сигналов.

Второе распределение: вероятность появления на выходе одного из возможных сигналов:

y	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n
(z_i,x_j)	q_1	q_2	…	q_{l-1}	q_l

$$\sum_{i=1}^{l} q_i = 1$$

Различают автоматы Мили и Мура. При автомате мура отсутствует зависимость от xj.
2 частных случая:
X-детерминированный автомат.
Y-детерминированный автомат.

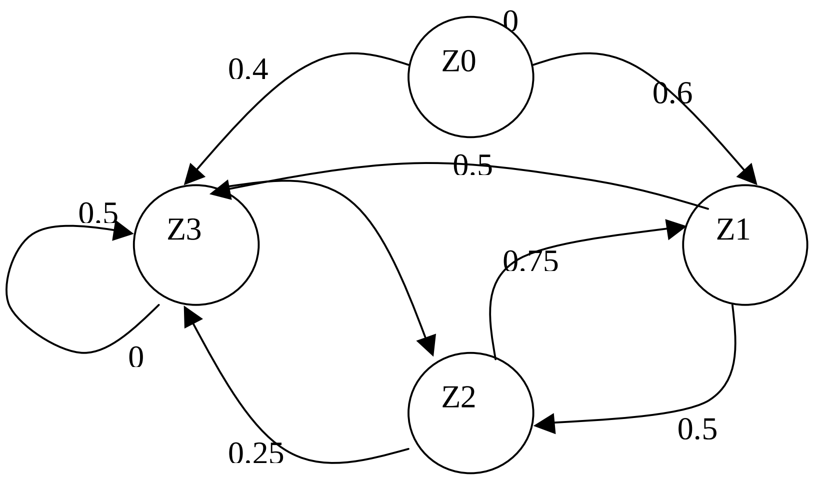
Пример задания автоматов и решения с помощью их задач. Задан y-детерминированный автомат Мура:

Z	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3
Y	0	1	1	0

Матрица вероятностей переходов:

$$P=\begin{vmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{vmatrix}$$

Найдем вероятность того, что на выходе окажется сигнал равный 1.
Перейдем к более наглядному заданию автомата в виде графа:



Свяжем вероятности состояний с вероятностью сигналов. Вероятности состояний – финитные, законченные вероятности. $P(1)=Pz_1+Pz_2$. z_0 – невозвратное состояние, доля времени пребывания в нем ничтожна мала и $Pz_0=0$. Вероятности состояний z_1, z_2 и z_3, будем находить исходя из следующего: вероятность любого состояния равна сумме произведений вероятностей состояний из которых есть переход в данное, на вероятность этого перехода.

$Pz_1=Pz_0*0,6 + Pz_2*0,75$
$Pz_2=Pz_1*0,5 + Pz_3*0,5$
$Pz_3=Pz_0*0,4 + Pz_1*0,5 + Pz_2*0,25 + Pz_3*0,5$

Получили систему линейных алгебраических уравнений. Однако эта система уравнений вырождается. Но решить ее можно с помощью нормировочного уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{zi} = 1$$

Теперь если подставить это уравнение вместо любой строки, то система решается и дает результат.

$Pz_1=3/12$
$Pz_2=4/12$
$Pz_3=5/12$
$P(1) = 7/12 \sim 0,583$

Математическое описание y-детерминированного P-автомата соответствует описанию дискретной Марковской цепи.

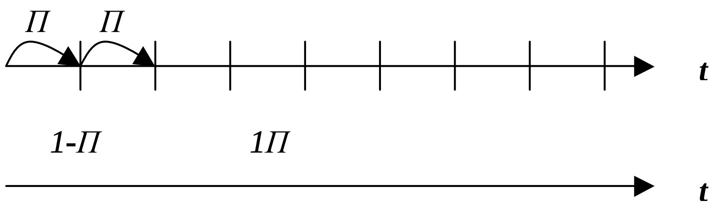
ДИСКРЕТНАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА

Множество случайных величин $\{x_i\}$ (состояний) образуют цепь Маркова, если вероятность того, что следующее состояние окажется равным x_{i+1} зависит только от значения x_i и не зависит от предыдущих значений процессов.

Марковская цепь обладает свойством отсутствия последействия, которое заключается в том, что вероятность перехода из состояния не зависит от того, сколько времени процесс прибывал в этом состоянии.

Единственным распределение вероятности, обладающим свойством отсутствия последействия для дискретных процессов, является геометрическое распределение, для непрерывных процессов – показательное.

Геометрическое распределение



$p_1=\pi$ – событие не происходит.

$p_2=1-\pi$ – событие происходит.

Описание этого процесса и есть геометрическое распределение. Какова вероятность того, что интервал между событиями в сформированном потоке будет равен i тактовым интервалам.

$P_i = p^{i-1}(1-p)$ - математическое описание геометрического распределения.

Основные характеристики:

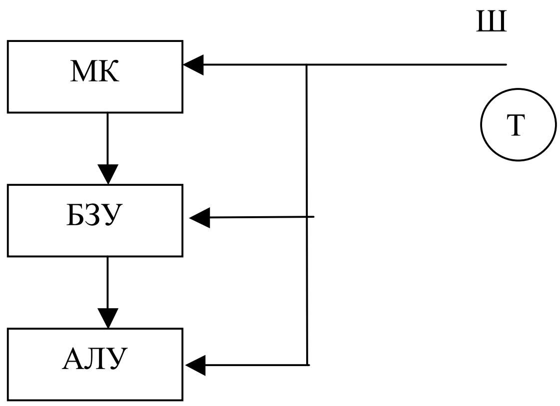
T – величина тактового интервала. Необходимо определить среднее значение случайной величины m. Интервал может оказаться равным величине T, 2T…

$$m=(1-p)T+(1-p)p\,2T+(1-p)p^2 3T+\ldots=(1-p)T\sum_{i=1}^{\infty}p^{i-1}i=(1-p)T\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dp}p^i=$$

$$=(1-p)T\frac{d}{dp}\sum_{i=1}^{\infty}p^i=(1-p)T\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{1-p}\right)=\left|\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{1-p}\right)=\frac{1}{(1-p)^2}\right|=\frac{T}{1-p}$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии $S_{гп}=b_1/(1-q)$. b1 – первый элемент прогрессии, q – множитель.

Пример исследования узла память-АЛУ.



Требуется построить и исследовать модель следующего вычислительного узла.

МК – память макрокоманд.

СИ – синхро-импульсы.

Работа узла: через каждые 2 такта из памяти макрокоманд происходит выборка и команда передается в АЛУ. Интервалы времени обработки команд АЛУ распределены по геометрическому распределению с вероятностью окончания обслуживания 1- π. Если выбранная макрокоманда застает АЛУ занятым, она занимает место в очереди БЗУ (буферное ЗУ). В случае, если АЛУ занято, а БЗУ заполнено, то очередная команда блокируется в памяти и выборка из памяти прекращается, пока не освободится место в очереди. Примем количество мест ожидания в БЗУ равным n. Требуется определить характеристики этой системы.

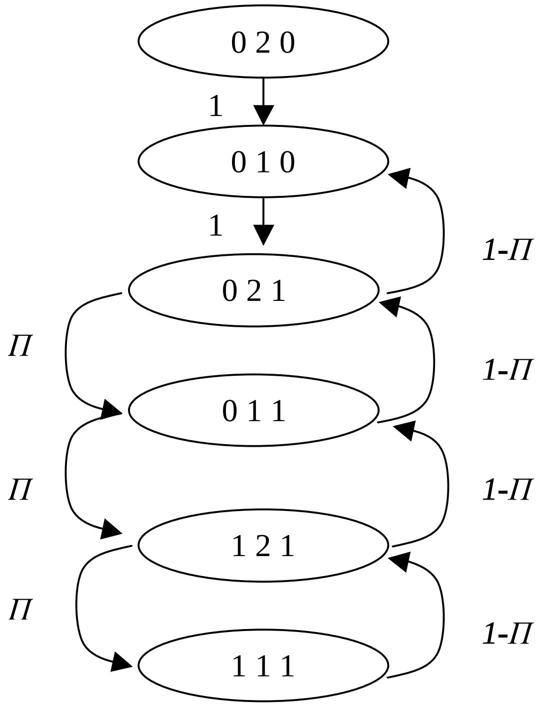
Такого рода системы хорошо описывать в виде систем массового обслуживания, которые предполагают наличие обслуживающего устройства (канал), возможной очереди, заявления на обслуживание.

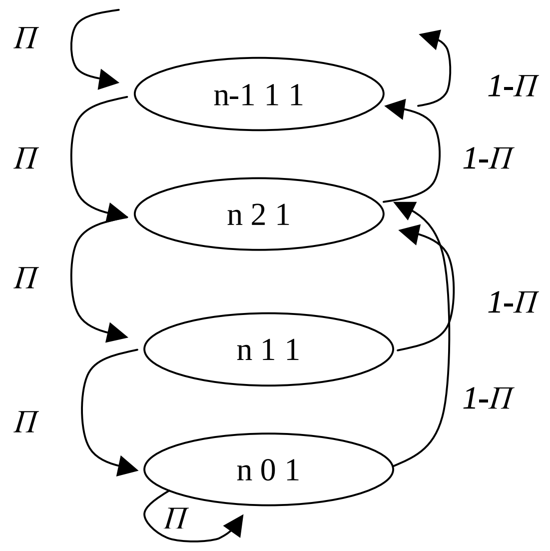
Система массового обслуживания: источник, очередь, обслуживающий прибор.

Построим граф состояний: будем кодировать состояния с помощью следующих 3х компонент: j, t_1, t_2. j – будет обозначать количество заявок в очереди БЗУ (значения от 0 до n). t_1 – количество интервалов времени до появления очередной заявки (возможные значения 2, 1, 0 (состояние блокировки)). t_2 – состояние АЛУ (0 – свободно, 1 – занято).

π – обслуживания не произойдет .

1- π – обслуживание произойдет.





Определим вероятности состояний:

$P_{020}=0$

$P_{010}=(1-\pi)P_{021}$

$P_{021}=P_{010}+(1-\pi)P_{011}$

В этом графе есть стандартные и нестандартные состояния. Нестандартные – первые три и последние три. Остальные стандартные.

$P_{i21}=\pi P_{i-1\,11}+(1-\pi)P_{i11}$ (i от 1 до n-1).

$P_{i11}=(1-\pi)P_{i+1\,21}+\pi P_{i21}$ (i от 1 до n-1).

Еще нестандартные:

$P_{n21}=P_{n-1\,11}+(1-\pi)(P_{n11}+P_{n01})$

$P_{n11}=\pi P_{n21}$

$P_{n01}=\pi(P_{n11}+P_{n01})$

Обозначим $P_{010}=p$, $w=\pi/(1-\pi)$.

Тогда:

$P_{021}=p/(1-\pi)$

$P_{011}=wp/(1-\pi)$

Если двигаться дальше, то используя математическую индукцию по i получим:

$$P_{i21}=\frac{w^{2i}}{1-p}p$$

$$P_{i11}=\frac{w^{2i+1}}{1-p}p$$

$$P_{n11}=pw^{2n+1}$$

$$P_{n01}=pw^{2n+2}$$

Для нахождения вероятности P_{010} воспользуемся нормировочным уравнением: $\sum P_{jt1t2}=1$

$$p=[1+\frac{1}{1-p}\sum_{i=0}^{2n} w^i w^{2n+1} w^{2n+2}]^{-1}=|$$ с учетом того, что сумма у нас – это сумма геометрической прогрессии

$$S=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}\,|=\frac{2(1-p)-1}{2(1-p)-w^{2n+2}}$$

Определим характеристики системы. Определим среднее время обслуживания 1 заявки системой в целом. Тр – время работы системы. S – время, в течение которого обслуживается заявка.

$S*P_{обсл.АЛУ}$=m – та доля времени, в течение которого заявка обслуживается в АЛУ. Тогда:

$S=m/P_{обсл.АЛУ}=\dfrac{T}{(1-p)(1-p)}$

m – мы нашли ранее.

m=T/(1- π)

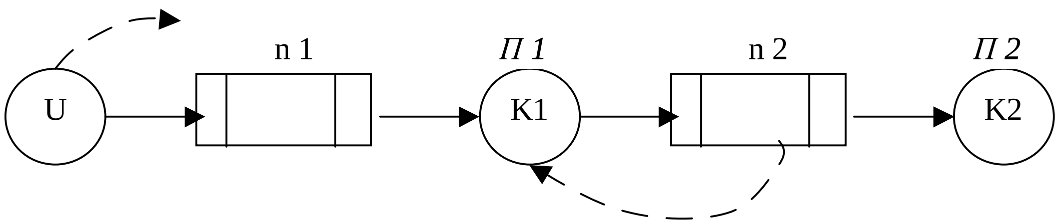
p – это в принципе вероятность простоя АЛУ. Т.е. вероятность, что АЛУ работает = 1-p.

S=T/((1- π)(1-p))

$L_{оч}$ – средняя длина очереди.

$$L_{оч}=\sum i\cdot P_{it1t2}$$

Пример: система массового обслуживания.



π_2 – вероятность того, что не завершилось обслуживание заявки.

2 режима работы:

1. Блокировки в источнике (пунктирная линия).
2. С потерей заявки (сплошная линия).

$j_1t_1j_2t_2\ldots$

$j_1=0..n_1$

$j_2=0..n_2$

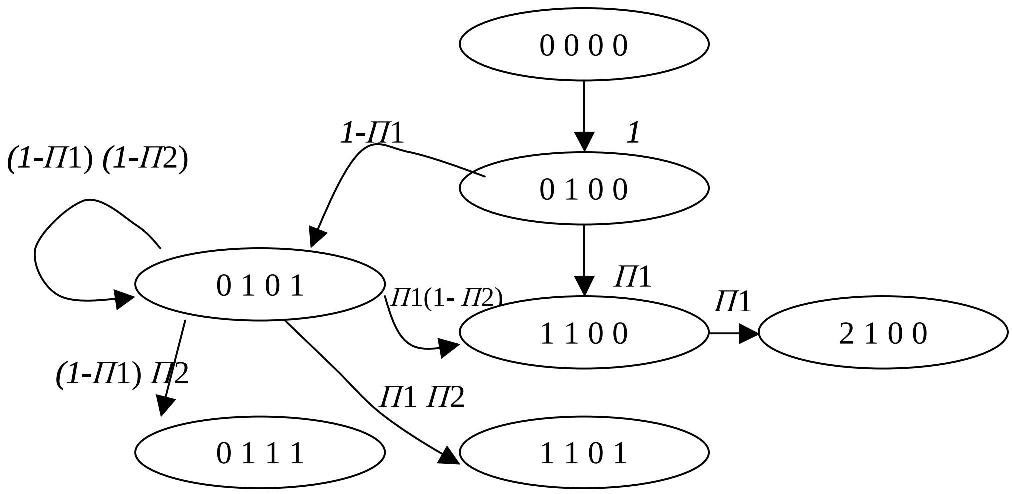
j_1j_2 – состояние очередей

t_1=0,1,2 (свободен, занят, заблокирован) – состояние первого канала.

t_2=0,1 – состояние второго канала.

Предполагаем, что источник выдает заявки каждый такт. Работа источника не зависит от работы системы в целом.

Посмотрим, как будет выглядеть начало графа:



π_1 – вероятность того, что заявка не обслужится.

НЕПРЕРЫВНО-СТАХОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ (Q-СХЕМЫ) QUEUING SYSTEM.

Такого рода модели используются с использованием модели систем массового обслуживания. Системы массового обслуживания (СМО) – это системы, в которых можно выделить 2 взаимосвязанных процесса:
Поступление заявок в систему.
Обслуживание заявок системой.

Поток событий – это последовательность событий, происходящих одно за другим в некоторые моменты времени. Поток событий описывается в виде временной оси, с отмеченными на ней точками (событиями):
T – интервал времени, в течение которого происходили события. Это случайная величина.
ti – интервал между событиями. Тоже случайная величина.

СМО предполагает наличие 2х потоков:
Входной поток – т.е. множество моментов времени поступления заявок.
Поток обслуживаний – т.е. множество моментов времени окончания обработки заявок.

Поток называется однородным, если он характеризуется только моментами наступления событий $\{t_i\}$ и задается последовательностью наступления этих событий.
Поток называется неоднородным, если он задается последовательностью $\{t_i, f_i\}$, где f_i – набор признаков событий (признаки источников, требования к виду оборудования…).
Поток называется регулярным, если t_i – постоянная величина. Если ti случайная величина – поток нерегулярный.
Поток рекуррентный, если t_i – это независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения.
Тип системы массового обслуживания определяется судьбой заявок, заставших канал обслуживания занятым:
СМО с очередями.
СМО с потерями.

Обслуживание заявок из очереди происходит в соответствии с дисциплинами обслуживания. На практике различают 4 основные дисциплины:
FIFO.
LIFO.
SIRO (Service In Random Order).
Очереди с приоритетами.

Кендалл ввел нотацию для описания СМО: A/B/s/m/k.
s – число обслуживающих приборов (число каналов обслуживания).
m – количество мест ожидания (максимальная длина очереди).
k – число источников.
A – входной поток.
B – поток обслуживаний.
С помощью A и B задается закон распределения вероятностей для этих потоков.

Варианты A, B:
D – детерминированный (регулярный) поток.
M – показательное распределение.
Er – распределение Эрланга порядка r.
Hr – гиперпоказательное (гиперэрлонговское) распределение порядка r.
G – распределение общего вида (все остальное).

ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК

Поток, удовлетворяющий следующим 3м требованиям, называется простейшим:
1. Поток стационарен, если вероятность поступления заданного числа событий в течение интервала времени фиксированной длины зависит только от величины этого интервала и не зависит от местоположения интервала на оси времени.
2. Поток ординарен, если вероятность наступления 2х или более событий в течение элементарного интервала времени $\Delta t \to 0$. Есть величина бесконечно малая по сравнению с вероятностью наступления одного события. В нем не могут совпасть события.
3. Поток называется потоком без последействия, если для 2х или более непересекающихся интервалов времени число событий наступающих на одном из них не зависит от числа событий, наступающих на других.

Простейший поток также называют стационарным Пуассоновским потоком. Это связано с тем, что количество событий, попадающих на интервал времени длиной τ в простейшем потоке распределены по закону Пуассона:

$$P_m(t)=\frac{(l\,t)^m}{m!}e^{-l\,t}$$

Это вероятность того, что в течение времени τ произойдет ровно m событий. Параметр λ называется интенсивностью потока (среднее число событий за единицу времени).

Для показательного закона распределения:

$$F(t)=1-e^{-l\,t}$$

$$f(t)=l\,e^{-l\,t}$$

$m=s=\frac{1}{l}$ - среднее отклонение от математического ожидания и матожидание.

Величина $n=\frac{s}{m}=1$ характеризует стохастичность потока (коэффициент вариации).

Важность простейшего потока при исследовании СМО:

1. Простейший поток (или близкие к нему потоки) наиболее часто встречаются на практике.
2. При исследовании систем массового обслуживания, заменяя входной поток простейшим потоком с той же самой интенсивностью, можно получить удовлетворительные результаты при исследовании системы.
3. Т.к. простейший поток наиболее стохастичный из всех видов потоков, то характеристики системы, полученные при исследовании аппроксимации простейшим, получаются заведомо не хуже, чем в реальной системе.
4. При суммировании большого числа ординарных стационарных потоков с любой степенью последействия мы получаем простейший поток. Суммирующиеся потоки должны вносить близкую долю заявок.

Вероятность того, что в течение интервала времени τ не произойдет ни одного события:

$$P_0(t)=e^{-l\,t}$$

Матожидание $m=l\,t$.

Вероятность того, что в течение времени τ произойдет хотя бы 1 событие: $P_{>=1}(t)=1-e^{-l\,t}$.

Возьмем интервал времени Δt. Вероятность того, что в течение этого интервала времени в простейшем потоке не произойдет ни одного события:

$$P_0(\Delta t)=e^{-l\Delta t}$$

Мы разложим это выражение в ряд:

$$P_0(\Delta t)=1-l\Delta t+\frac{1}{2!}(l\Delta t)^2+\frac{1}{3!}(l\Delta t)^3+...$$

Учтем, что Δt бесконечно малая величина:

$$P_0(\Delta t)=1-l\Delta t+\Theta(\Delta t)\approx 1-l\Delta t$$

Тогда вероятность того, что в простейшем потоке произойдет хотя бы 1 событие: $P_{>=1}(\Delta t)=l\Delta t$ Это также вероятность того, что произойдет 1 событие.

$S=\frac{m}{P_{обслуж}}$ - обслуживание заявки в канале.

λ – интенсивность обслуживания, количество заявок, обслуживаемых в единицу времени.

1-p – вероятность обслуживания.

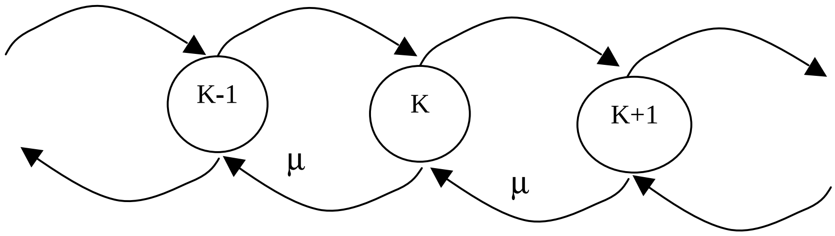
$\frac{1}{m}$ - время обслуживания.

Т.о. $S=\frac{m}{P_{обсл}}=\frac{1/m}{1-p}$

$$L_{оч}=\sum_{i=1}^{n+1}P_i(i-1)+nP_{n+2}$$

ДИАГРАММЫ ИНТЕНСИВНОСТИ ПЕРЕХОДОВ

Они содержат вершины состояний, соединенные дугами переходов. Дугам присваиваются числа, соответствующие интенсивностям переходов, а не вероятностям. При этом дуги переходов состояний отсутствуют. Интенсивность перехода – это интенсивность, с которой может увеличиваться или уменьшаться число заявок в системе. Увеличиваться может с интенсивностью λ, а уменьшаться может с интенсивностью μ.



Будем понимать под величиной потока вероятности произведение вероятности состояния на интенсивность ухода из этого состояния. Алгебраические уравнения, описывающие работу системы можно записать исходя из законов равенства потоков состояний для вероятностей: суммарный выходной поток всегда равен суммарному входному.

$$P_{k-1}l + P_{k+1}m = P_k(l + m)$$

СИСТЕМА M/M/N С БЛОКИРОВКОЙ

При построении системы алгебраических уравнений кроме правила равенства потоков для состояний можно использовать правило равенства потоков вероятностей через сечение диаграммы.

$$\frac{1}{m} = w$$

$$P_0 = p$$

$$P_0 l = P_1 m$$

$$P_1 l = P_2 m$$

$$P_2 l = P_3 m$$

$$P_1 = \frac{l}{m}P_0 = wp$$

$$P_2 = \frac{l}{m}P_1 = w^2 p$$

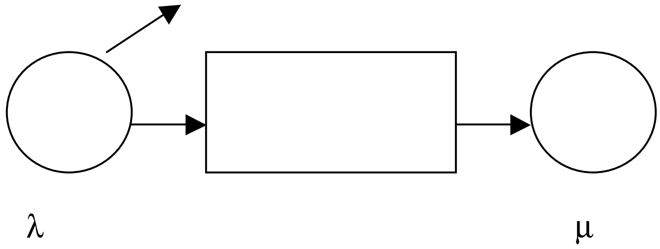
$$P_3 = \frac{l}{m}P_2 = w^3 p$$

$$P_i = w_i p$$

$$\sum_{i=0}^{n+2} P_i = 1$$

$$p = \frac{1-w}{1-w^{n+3}}$$

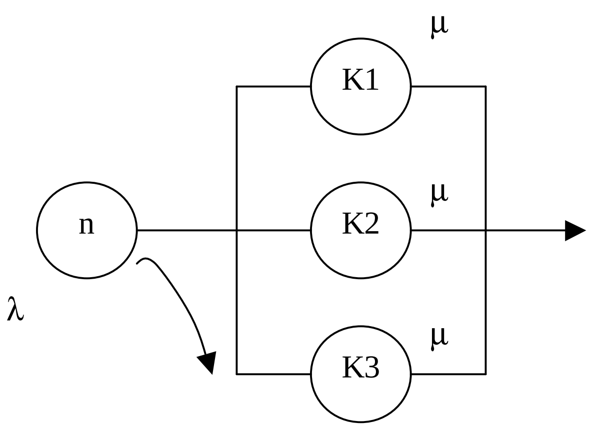
СИСТЕМА С ОТКАЗАМИ



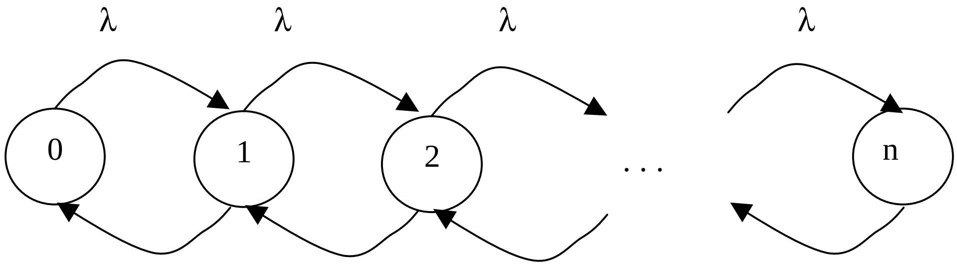
$$\sum_{i=0}^{n+1} P_i = 1$$

$p = \dfrac{1-w}{1-w^{n+2}}$ - т.е. отнять одно состояние.

МНОГОКАНАЛЬНОЕ СМО С ОТКАЗАМИ M/M/n/0



μ – интенсивность обслуживания в канале.
Если не хватает каналов, то заявка уходит.



n – максимальное количество заявок.

$$P_0 l = P_1 m$$

$$P_1 l = 2P_2 m$$

$$P_2 l = 3P_3 m$$

$$P_1 = wp$$

$$P_2 = \frac{1}{2} wP_1 = \frac{w^2}{2!} p$$

$$P_3 = \frac{1}{3} wP_2 = \frac{w^3}{3!} p$$

$$P_i = \frac{w^i}{i!} p \quad \textbf{(1)}$$

$$p = [\sum_{i=0}^{n} \frac{w^i}{i!} p] \quad \textbf{(2)}$$

Выражения (1) и (2) называются формулами Эрланга. Вероятность того, что заявка, придя в систему получит отказ:

$$P_{отк} = P_n = \frac{w^n}{n!} p$$

Относительная пропускная способность – это вероятность того, что заявка обслужится:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{w^n}{n!} p$$

$A = lQ$ - интенсивность выходного потока, т.е. обслуженных заявок.

Среднее число занятых каналов:

$$\overline{k} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_0 + \ldots + n \cdot P_0$$

Необходимо узнать, сколько должно работать каналов, чтобы обеспечить интенсивность A:

$$\overline{k} = \frac{A}{m}$$

ФОРМУЛА ЛИТТЛА

Эта формула связывает между собой среднее время пребывания заявок в системе (Wc) и среднюю длину очереди (Lc) в этой системе.

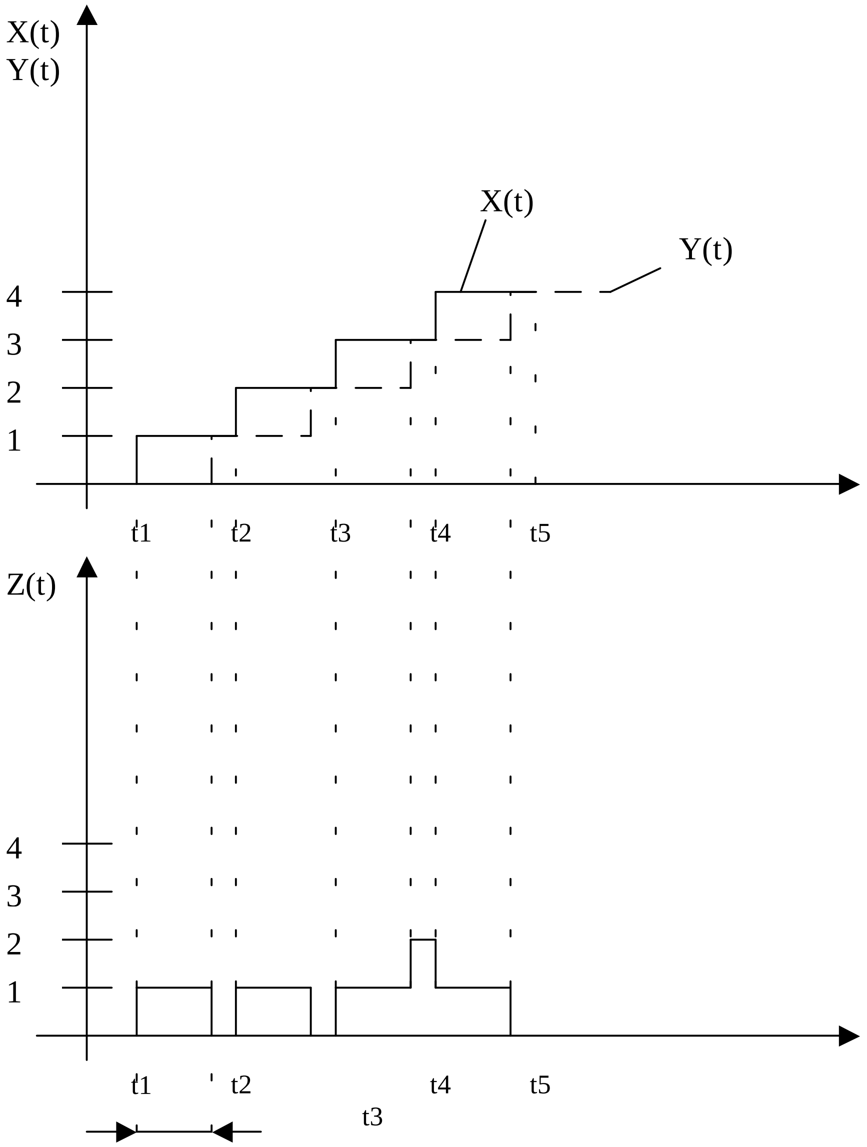
Рассмотрим систему массового обслуживания произвольной структуры. Важно: в этой системе очередь не ограничена и предполагается наличие при работе системы наличие стационарного режима (λ/μ>1).

Если система работает длительное время, то λ=μ.

X(t) – количество заявок пришедших в систему к моменту времени t.

Y(t) – количество заявок ушедших из системы к моменту времени t.

Нарисуем график:



ti – время пребывания заявки в системе

$Z(t) = Y(t) - X(t)$ - количество заявок, находящихся в момент времени t в системе.

Нас интересует среднее значение числа заявок, находящихся в системе на протяжении работы в этой системе.

$$\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt = L_c$$

Интеграл – площадь фигуры под графиком функции **J**. В нашем случае для каждой заявки – это прямоугольник. Длина – время пребывания заявки в системе, высота – единица.

$$L_c = \frac{1}{T}\sum t_i \cdot 1 = \frac{l}{l\,T}\sum t_i$$

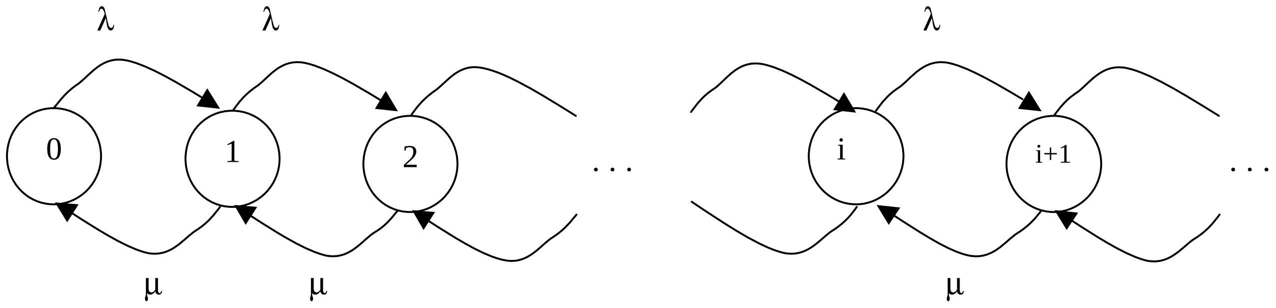
$l\,T$ - количество заявок пришедших в систему.

$$L_c = l\,W_c$$

$L_{оч} = l\,W_{оч}$ - 2ая формула Литтла.

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ M/M/1/∞

$\frac{l}{m} < 1$ - т.е. все заявки, пришедшие в очередь, будут обслужены. Вероятности состояний будут конечны.



$$P_0 l = P_1 m$$
$$P_1 l = P_2 m$$

$$P_1 = wp$$
$$P_2 = w^2 p$$
$$P_i = w^i p$$
$$\sum_{y=0}^{\infty} P_i = 1 => \sum_{i=0}^{\infty} w^i p = 1 => p\sum_{i=0}^{\infty} w^i = 1$$

Последняя сумма – сумма геометрической прогрессии.

$$s = \frac{b_1}{1-q}$$
$$p = 1-w$$

Вероятности будут убывать. Т.е. у нас самая большая вероятность – вероятность простоя.

Среднее число заявок в системе

$$L_c = \sum_{i=0}^{\infty} iP_i = \sum_{i=0}^{\infty} i(1-v) = (1-v)\sum_{i=0}^{\infty} i v^{i} = w(1-v)\sum_{i=0}^{\infty} i v^{i-1} = v(1-v)\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dv}(v^{i}) =$$
$$= v(1-v)\frac{d}{dv}\sum_{i=1}^{\infty}(v^{i}) = v(1-v)\frac{d}{dv}\frac{v}{1-v} = v(1-v)\frac{1}{(1-v)^2} = \frac{v}{1-v}$$

$W_c = \frac{L_c}{l} = \frac{v}{l(1-v)}$ - среднее время пребывания заявок в системе.

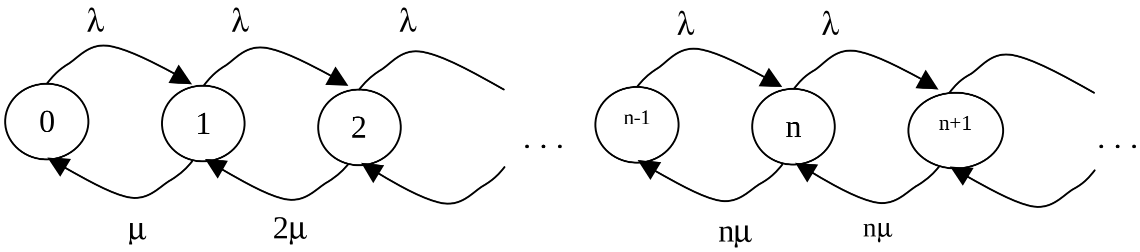
Среднее число заявок в очереди
Это среднее число заявок, находящихся в системе минус среднее число заявок находящихся под обслуживанием.

$$L_{оч} = L_c - L_{обс}$$

Под обслуживанием может находится 0 заявок с вероятностью p, а 1 заявка с вероятностью 1-p.

$$L_{обс} = 1(1-p) + 0 \cdot p = 1-p$$
$$L_{оч} = \frac{w}{1-w} - (1-p) = \frac{w}{1-w} - w = \frac{w^2}{1-w}$$
$$W_{оч} = \frac{w^2}{l(1-w)}$$

N-канальная СМО с НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ M/M/n/∞



Для этой системы условие стационарности: $\frac{l}{nm} < 1$.

nμ далее остается постоянно, т.к. число каналов ограничено.

$$P_n l = P_{n+1} nm$$

$$P_{n+1} = \frac{w}{n} P_n$$

$$P_{n+1} l = P_{n+2} nm$$

$$P_{n+2} = (\frac{w}{n})^2 P_n$$

$$p_{n+i} = (\frac{w}{n})^i p_n$$

Найдем суммарную вероятность для всех состояний, имеющих номера больше, чем n.

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{n+i} = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{w}{n})^i p_n = p_n \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{w}{n})^i = \frac{w^{n+i}}{n^i \cdot n!} p$$

$$p_n = \frac{w_n}{n!} p$$

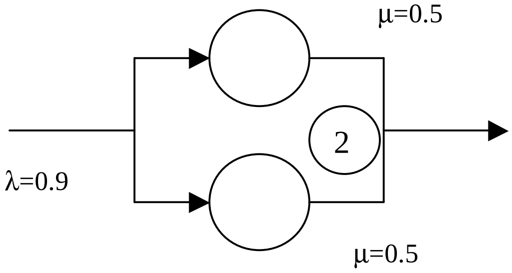
$$p = [1 + w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3!} + \ldots + \frac{w^n}{n!} + \frac{w^{n+1}}{n!(n-w)}]$$

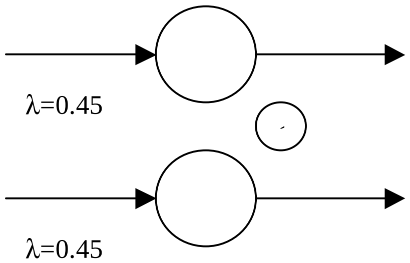
Параметры системы:

1. Среднее число занятых каналов системы: $\bar{k} = \frac{l}{m}$
2. Средняя длина очереди: $L_{оч} = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot P_{n+r} = \frac{w^{i+1} p}{n \cdot n!(1 - \frac{w}{n})^2}$.
3. Среднее время пребывания заявок в системе: $L_c = L_{оч} + w$.

$$W_{оч} = \frac{L_{оч}}{l}$$

Пример:





μ=0,5
λ=0,9
Исследуем одну из одноканальных систем.
1.

$$w = \frac{0,45}{0,5} = 0,9$$

$$p_0 = 1 - w = 0,1$$

$$L_{оч} = \frac{w^2}{1-w} = \frac{0,81}{0,1} = 8,1$$

$$W_{оч} = \frac{L_{оч}}{l} = \frac{8,1}{0,45} = 18$$

2.

$$w = \frac{l}{m} = \frac{0,9}{0,5} = 1,8$$

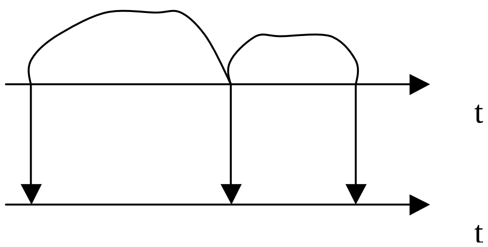
$$p_0 = [1 + 1,8 + \frac{(1,8)^2}{2} + \frac{(1,8)^3}{2(2-1,8)}]^{-1} = 0,0526$$

$$L_{оч} = \frac{1,8^3 \cdot 0,0526}{2 \cdot 2!(1-\frac{1,8}{2})^2} = 7,67$$

$$W_{оч} = \frac{7,67}{0,9} = 8,52$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭРЛАНГА. МЕТОД ЭТАПОВ.

Если взять простейший поток событий, оставить в нем каждое k-ое событие, то получим поток Эрланга k-ого порядка.



$$f(t) = \frac{l(lt)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-lt}$$

λ – интенсивность исходного потока.
f(t) – функция плотности распределения.

$m = \dfrac{k}{l}$ - математическое ожидание.

$s = \dfrac{\sqrt{k}}{l}$ - среднеквадратичное отклонение.

Коэффициент вариации: $\dfrac{s}{m} = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

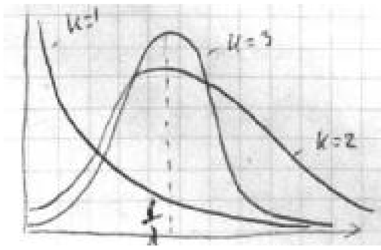
Поток Эрланга формируется таким образом, что интервалы являются суммой интервалов простейшего потока. При k→∞ фактически этот поток все ближе подходит к регулярному потоку.

Если еще одновременно с просеиванием делать масштабирование – будем получать нормированный поток Эрланга $l^* = kl$.

ИНТЕНСИВНОСТЬ

Функция плотности распределения потока $f^*(t) = \dfrac{kl(klt)^k}{(k-1)!} e^{-lkt}$.

Мат. ожидание: $m^* = \dfrac{1}{l}$ для нормирования потока.

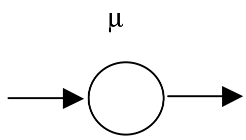


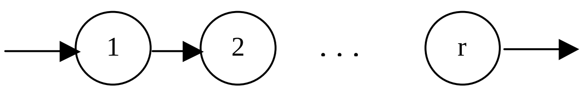
$\tilde{s}$ - ср. квадратичное для нормирования потока Эрланга.
$\tilde{s} = s$ - для реального процесса это делается выбором λ и k.

$\dfrac{1}{l} = \tilde{m} \Rightarrow l = \dfrac{1}{\tilde{m}}$

Выбирается k таким образом, чтобы $k = \dfrac{\tilde{m}^2}{\tilde{s}}$, тогда у потока Эрланга $\tilde{m}$ и $\tilde{s}$ будут совпадать с реальным процессом.

Поток Эрланга обладает последействием. Интервалы становятся все больше и больше связаны друг с другом. Поэтому замена потоком Эрланга (распределением) нельзя просто заменить реальное распределение.





Пока заявка не прошла все r этапов обслуживания заявка не обслуживается. Обслуживание процессов производится поэтапно. Закон распределения показательный.

Интервал времени обслуживания – он складывается из интервалов времени на каждом этапе (r). Подобрав λ, k заменяем реальное распределение распределением Эрланга с тем же m и σ.

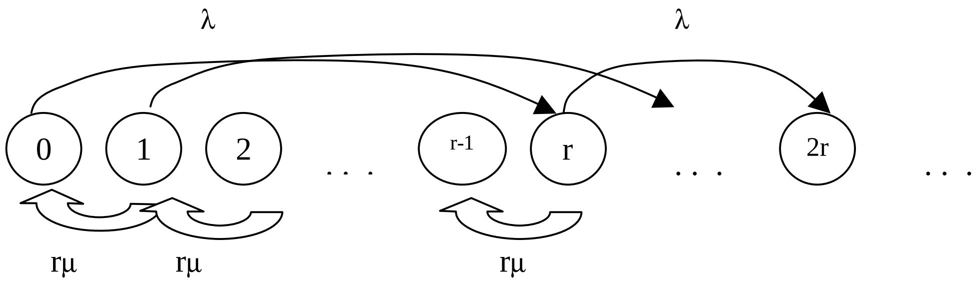
Аналитическая модель – непрерывная Марковская модель.

Рассмотрим 2 системы: **M/Er/1/∞:** будем определять состояние системы, как общее число этапов обслуживания, через которые должны пройти все заявки, находящиеся в данный момент в системе. k – заявок.

Предположим в системе k заявок и заявка, которая обслуживается каналом, находящемся на i-м этапе обслуживания.

Тогда общее количество этапов, через которые должны пройти заявки до полного их обслуживания равно:
$d = (k-1)r + (r-i+1)$
r-i – осталось этапов для i-ой заявки.
+1 – этап, на котором обслуживается заявка.

Диаграмма интенсивности переходов:



Т.к. процесс не является процессом размножения и гибели, при составлении системы мы воспользуемся классическим положением:

$$\sum вход.поток = \sum выход.поток$$

$$\begin{cases} P_0 l = P_1 rm \\ P_i(l + mr) = P_{i+1}(rm), i = \overline{1, r-1} \\ P_i(l + rm) = P_{i+1} rm + P_{i-r} l, i \geq r \end{cases}$$

Т.к. система не ограничена, то ее всегда можно ограничить из соображений точности.

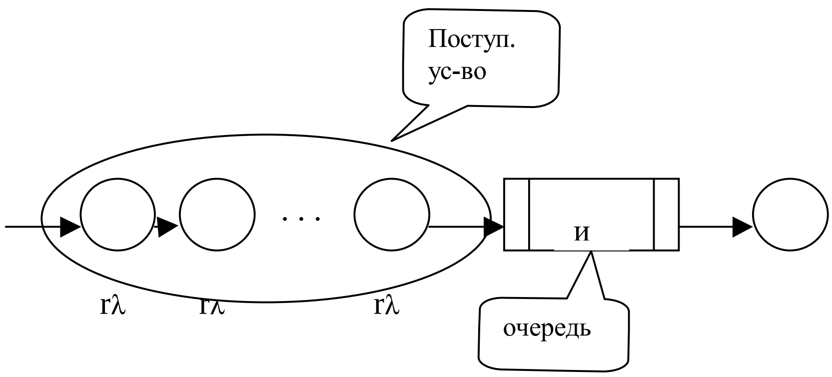
От вероятностей P_i можно перейти к P_i* - вероятности нахождения i заявок в очереди (системе).

$$P_k^* = \sum_{j=(k-1)r+1}^{kr} P_j$$

СИСТЕМА СИММЕТРИЧНАЯ СИСТЕМЕ M/Er/1/∞

Er/M/1/∞

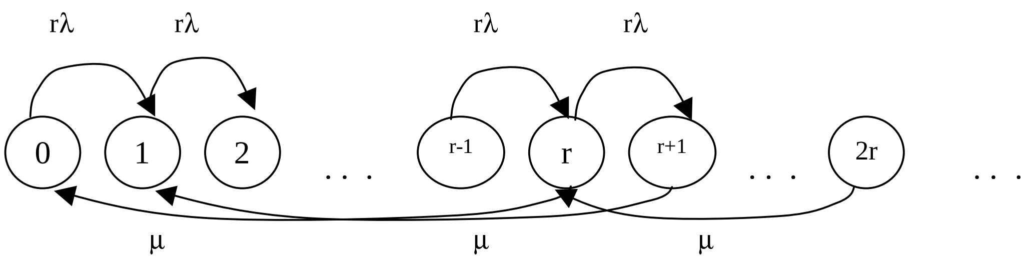
Для того, чтобы построить аналитическую модель, мы будем предполагать, что заявка поступает в системе поэтапно:



Будем определять состояния в данный момент времени общим числом этапов поступления в этой системе. Если в системе уже находится k заявок, а очередная находится на i-м этапе поступления, то:

$$j = rk + i - 1$$

Диаграмма интенсивности переходов для этой системы:



Система алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} P_0 r l = P \cdot r \cdot m, \ \text{для\_0-го\_состояния} \\ P_i r l = P_{i-1} r l + P_{i+r} m, i = \overline{1, r-1} \\ P_i (m + r l) = P_{i-1} r l + P_{i+r} r m, i \geq r \end{cases}$$

P_k^* - вероятность нахождения в данный момент времени k заявок.

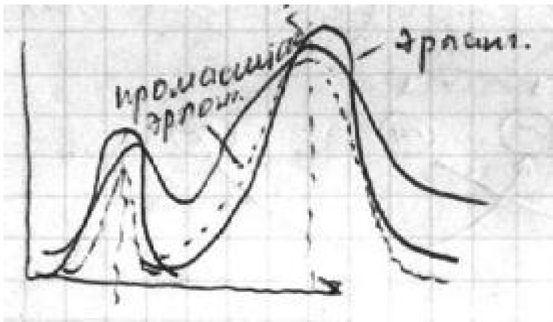
$$P_k^* = \sum_{j=kr}^{r(k+1)-1} P_j$$

Все это делается для того, чтобы свести немарковский процесс к Марковскому (который описан показательным законом распределения).

ГИППЕРЭРЛАНГОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. Hr.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{R} P_i \frac{k_i l_i (k_i l_i t)^{k_i - 1}}{(k_i - 1)!} e^{-l_i k_i t_i}$$

Метод замены реального распределения Hr называется методом вложенных Марковских цепей. Hr – это смесь распределения Эрланга (несколько распределений с λ и k) и формирование интервала, включающего в смесь с вероятностью P_i и в результате поток становится сложным и описывается этим распределением.



НЕМАРКОВСКИЕ СМО

Это СМО, в которых потоки событий приводят к изменениям состояний системы отличны от простейших. Для таких систем встроенного математического аппарата нет, но есть частичные результаты.

1. **СМО M/G/n/0**

   Если нуля нет, то система с отказом.

   G – поток общего вида.

   Для систем этого вида справедливы результаты, полученные для системы M/M/n.

2. **СМО M/G/1/∞**

   Одноканальные СМО с неограниченной очередью. Поток не является простым. Если на вход этой системы – простейший поток заявок с интенсивностью λ, а время обслуживания имеет значение $\bar{t} = \frac{1}{m}$ и коэффициент вариации $n_m = \frac{Q}{m}$, то среднее число заявок в очереди в этой системе может быть определено, как:

   $$L_{оч} = \frac{w^2 (1 + n_m^2)}{2(1 - w)}$$

   $$w = \frac{1}{m}$$

   А среднее число заявок в системе $L_c = \frac{w^2 (1 + n_m^2)}{2(1 - w)} + w$

   Используя формулу Литла можно получить средне время пребывания в очереди и в системе: $w_{оч}$, w_c.

3. **СМО G/G/1/∞.**

Оба потока не являются простейшими. На входе действует поток с l и n_l, а поток обслуживания имеет m и n_m. Для этого случая точные значения $L_{оч}$ и L_c не определяются, но можно определить верхние и нижние границы этих значений:

$$\frac{w^2(n_l^2+n_m^2)}{2(1-w)}-\frac{w(1-n_l^2)}{2}\le L_{оч}\le\frac{w^2(n_l^2+n_m^2)}{2(1-w)}+\frac{(1-w)(1-n_l^2)}{2}$$

Приблизительная оценка длины очереди:

$$L_{оч}=\frac{w^2(n_l^2+n_m^2)}{2(1-w)}$$

$$L_c=L_{оч}+w$$

4. **СМО G/G/n/∞**

С неограниченной очередью. Для исследования используются косвенные методы исследования. Для такой системы можно построить 2 системы с характеристиками заведомо хуже и лучше заданной.

Худшую получим заменяя многоканальную систему n-канальной, где входной поток распределен по очереди.

$$l^*=\frac{l}{n}$$

$$n_l=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Верхнюю оценку можно получить многоканальную СМО 1-n-одноканальной заменив интенсивность обслуживания nμ. Для нее $w^*=\frac{w}{n}$. Эта система заведомо работает лучше, т.к. обслуживание происходит в n раз быстрее.

МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Существует 3 основные метода формирования:

1. Файловый или табличный метод.
2. Аппаратный.
3. Программный или аналитический.

Достоинства и недостатки:

При **файловом методе** случайные числа записываются на внешний носитель и по мере работы имитационной модели считываются в оперативную память. Смысл использования этого метода – если при исследовании информация случайных величин была предварительно собрана.

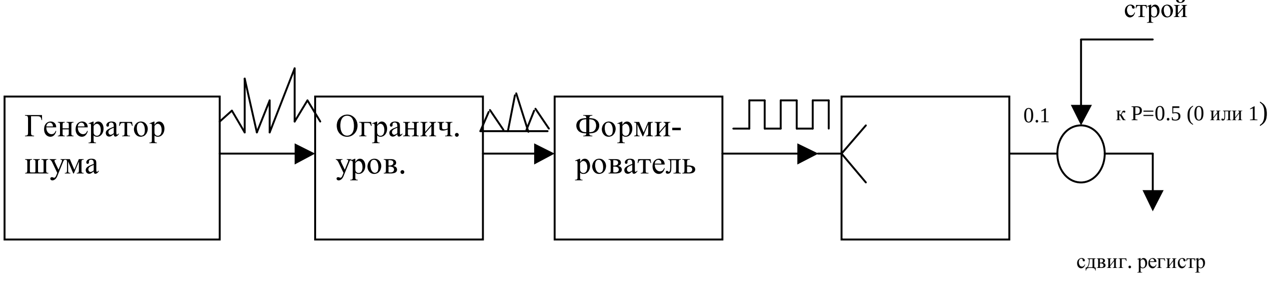
Достоинства:

- Однократность проверки статистических характеристик (m, s, вид распределения – все сохраняется).
- Воспроизводимость последними. Т.е. мы можем заново воссоздать ту же последовательность. Это важно в тех случаях, когда например, при исследовании модели обнаруживается аварийное состояние, и после доработки необходимо проверить, войдет ли модель снова в критическую секцию.

Недостатки:

- Потери памяти на хранение чисел и потеря времени на работу с ВЗУ.
- Неизменность характеристик.

Аппаратный метод предполагает изготовление и использование приставок для ЭВМ. В качестве источников случайности в них используются различные источники шумов и источники радиоактивности.



Достоинства:

- Неограниченность запаса чисел.
- Экономия памяти.

Недостатки:

- Необходимость создания специального оборудования.
- Невозможно воспроизвести последовательность.
- Необходимость периодической проверки статистических характеристик.

Алгометрический (программный). Формирование случайных чисел используя некоторые методы (алгоритмы).

Достоинства:

- Однократность.
- Воспроизводимость.

Недостатки:

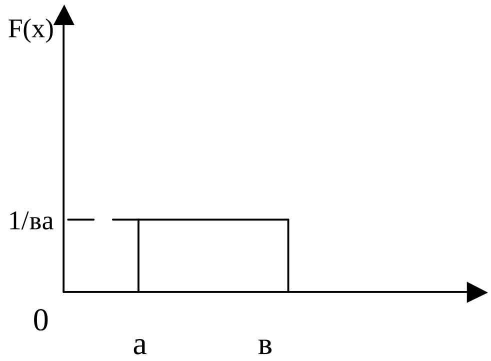
- Ограниченность запаса чисел периода.
- Затраты машинного времени на формирование случайных чисел.

Существенно на качество модели влияет количество датчиков. Практика показала, что наилучшей базовой последовательностью являются равномерно распределенные числа от 0 до 1 (РРСЧ).

РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА (РРСЧ)

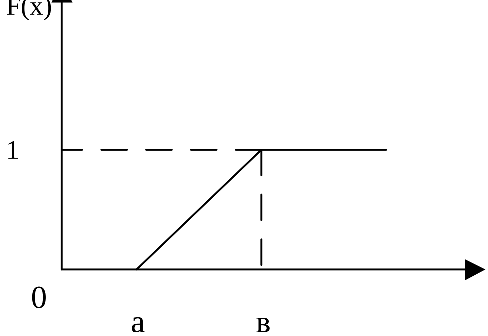
Это такие числа, для которых:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in (a,b) \\ 0, x \notin (a,b) \end{cases}$$



Для проверки:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b \\ 1, x > b \end{cases}$$



$m = \dfrac{b+a}{2}$ - матожидание.

$D = \frac{(b-a)^2}{12}$ - дисперсия.

$s = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$ - среднеквадратичное отклонение.

При использовании ЭВМ случайные числа будем представлять, как:

$x = 0, z_1, z_2 ... z_n$, n – разрядов.

Для интервала [0;1], то получим:

$m = \frac{1}{2}$

$D = \frac{1}{12}$

$s = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Для того, чтобы они были равномерно распределены, вероятность 1 или 0 в каждом разряде должна быть равна P(z=1)=P(z=0)=0,5

$x_i = \frac{i}{2^n - 1}, (i = 0 \div 2^n - 1$

В диапазоне от 0 до 1.

Вероятность каждого числа: $P_i=1/2^n$.

Найдем матожидание:

$$m_x = \sum_{i=0}^{2^n-1} P_i x_i = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \frac{i}{2^n - 1} = \frac{1}{2^n(2^n - 1)} \sum_{i=0}^{2^n-1} i = \frac{1}{2}$$

Дисперсия:

$$D_x = \sum_{i=0}^{2^n-1} P_i (x_i - m_x)^2 = \sum_{i=0}^{2^n-1} P_i {x_i}^2 - {m^2}_x = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \frac{i^2}{(2^n - 1)^2} - \frac{1}{4}$$

С учетом того, что:

$$\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$D_x = \frac{2^n + 1}{2^n - 1} \cdot \frac{1}{12}$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{2^n + 1}{2^n - 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

В связи с этим числа сформированные на ЭВМ называют псевдо-случайными квазиравномерными числами. Если n достаточно велико, то разницы между РРСЧ и квазиравномерными РРСЧ практически нету.

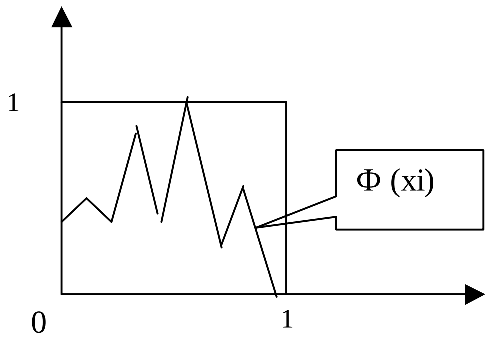
МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ РРСЧ

Как правило базовые последовательности РРСЧ формируются на основе рекуррентных вычислений.

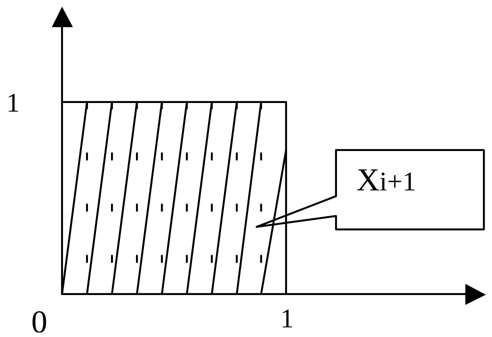
$X_{i+1}=\Phi(x_i)$

На качество РРСЧ существенно влияет вид функции Ф.

Если попробуем поработать с такой функцией, то увидим, что числа получаются плохими. Для получения высококачественной РРСЧ (функция должна достаточно полно заполнять квадрат):



Такая функция дает числа достаточно плохие, они существенно отличаются от РРСЧ.



Для получения хороших РРСЧ необходимо максимальное заполнение квадрата.
X_{i+1}=D(Ax)

Метод средних квадратов:

Если есть число разрядности 2n, то

$$x_i = 0, a_1, a_2, ..., a_{2n},$$

получим

$$x_i^2 = 0, b_1, b_2, ..., b_{3n}, ..., b_{4n}$$

Вырезают среднюю часть и используют дальше

$$x_{i+1} = 0, b_{n+1}, ..., b_{3n}$$

Вырождение последовательности – повторение средней части или обнуление.

В большинстве программ стандартного матобеспечения используется ***мультипликативный метод***:

$$x_{i+1} = (Ax_i + c) \bmod m$$

Этот алгоритм детерминирован. Это можно преобразовать к виду:

$$x_i = (a^i x_0 + \frac{(a^i - 1)c}{a - 1}) \bmod m$$

При правильном выборе a, x_0, m мы получаем псевдослучайную квазиравномерную последовательность:

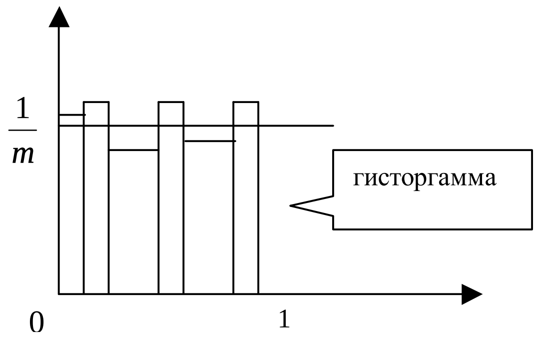
$$0 \le \frac{x_i}{m} \le 1$$

m обычно берут равным или близким к 2n. $a = 2^{n/2}$. X_0 – простое нечетное число. C – подбирают случайным путем, он влияет на корелляционные свойства.

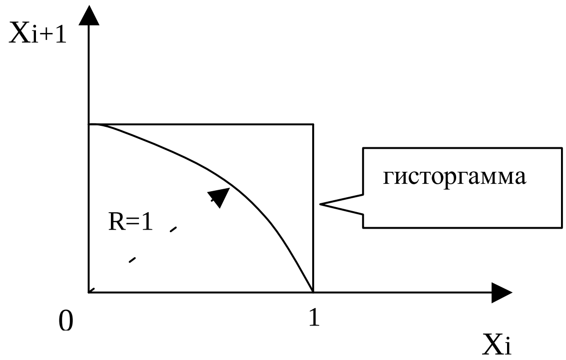
ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РРСЧ

Оценка качества осуществляется по критериям:

- **Равномерность**. Можно определить по гистограмме. Весь диапазон случайных чисел разбивается на m поддиапазонов. Подсчитывается количество попаданий каждого из случайных чисел в эти интервалы.



Частота попадания $C_i = \frac{N_i}{N} \to \frac{1}{m}$. Можно разбить всю последовательность на пары чисел x_i, x_{i+1} и осуществить проверку $x_i^2 + x_{i+1}^2 < 1$, затем подсчитать количество пар, для которых это условие удовлетворяется. Отношение: $\frac{2k}{N} \to \frac{p}{4}$



Если числа действительно равномерно распределены, то точки должны равномерно заполнить этот квадрат:

$$\frac{S_{1/4кв}}{S_{кв}} = \frac{pk^2}{4 \cdot 1} = \frac{p}{4}$$

- **Стохастичность**. Основывается на биномиальном распределении. Если исследовать вероятность встретить j единиц в l разрядах двоичного числа, то оказывается, что она подчиняется биномиальному распределению.

$$P(j,l) = c^j{}_l \, p^j (1-p)^{l-j}$$

P – вероятность застать единицу.
У нас должно быть: p=q=1/2
Это метод комбинаций: выделение разрядов и подсчет единиц.
Метод серий: все числа делятся на числа относящиеся к 1 из 2х классов:

$$x_i = \begin{cases} a, x_i \le p \\ b, x_i > p \end{cases}, \ p<1$$

aaaabbaaaaabbbbbbababaa – так представляется последовательность чисел.
Вероятность встретить серию определяется формулой Бернулли, которая записана выше.

- **Независимость**. Для оценки независимости случайных чисел используют корелляционный момент.

$$K_{xh} = \sum_j \sum_i (x_i - m_x)(y_i - m_h) P_{ij}$$

P_{ij} – вероятность встретить сочетание СЧ x_i и y_i.
Если k=0, то числа независимы.
При k>>0, существует сильная связь между числами.

Чаще используют коэффициент корелляции: $r_{xh} = \frac{K_{xh}}{s_x s_h}$.

При $r = 0$ - независимы.

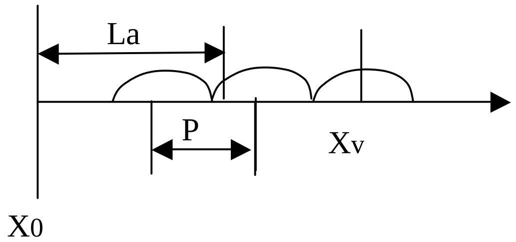
При $r = 1$ - аналитическая зависимость.

Для оценки независимости в последовательности x_i вводят в рассмотрение последовательность $y_i = x_{i+t}$ (τ>0). Т.е. исследуют зависимость между двумя последовательностями.

При любом $t \neq 0$ для достаточно больших значений N с доверительной вероятностью β справедливо:

$| r_{xh} | \le b\sqrt{\dfrac{1}{N}}$, т.е. если вычисленная экспериментальным путем ρ лежит в этих пределах, то с вероятностью β можно утверждать, что числа корелляционно независимы.

- **Длина участка апериодичности**. Запускают генератор случайных чисел со значением x_0 до значения x_v. V обычно выбирают $V = (1 \div 5)10^6$.



Затем запускают опять датчик со значения x_0 и фиксируют такие x_i, x_j, что $x_i=x_v$, $x_j=x_v$. Затем снова запускаем генератор со значения x_0 и фиксируем $x_i=x_i+p$. Длина участка апериодичности: $L_a=i+p$.
Для увеличения длины периода используют методы:

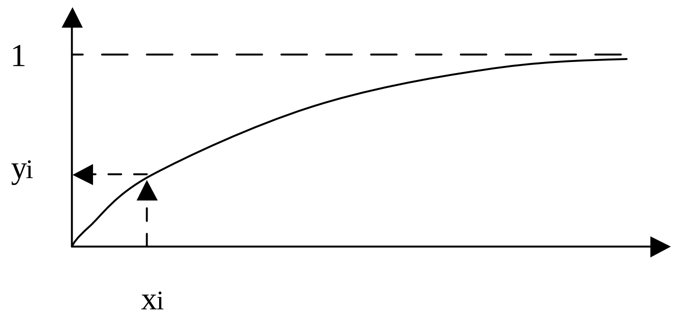
1. Увеличение глубины рекурсии. $x_i = \Phi(x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_{i-r})$.
2. Метод возмущений.

$$x_i = \begin{cases} \Phi(x_{i-1}), i \bmod m \ne 0 \\ \Psi(x_{i-1}), i \bmod m \ne 0 \end{cases}$$

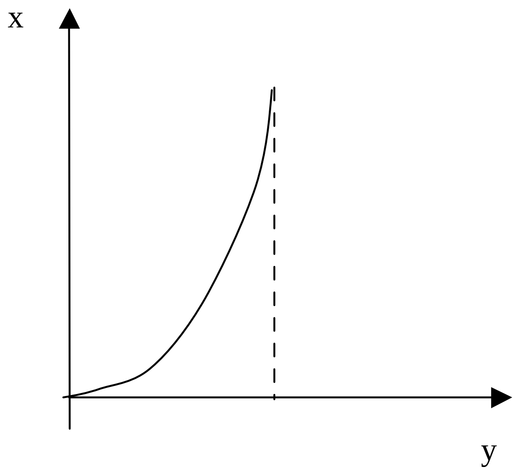
ФОРМИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

МЕТОД ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Он базируется: если случайная величина x имеет функцию распределения $F_x(x)$, то случайная величина $y_i = F_x(x_i)$ будет иметь равномерное распределение в диапазоне от 0 до 1. x_i – реализация случайной величины.



Если возьмем обратную функцию:



Введем в рассмотрение величину η (равномерно распределенное число).

φ – монотонная непрерывная функция. Попробуем определить каков закон распределения.

$$z = j(h)$$

$$F_z(x) = P(z < x) = P(j(h) < x) = P(h < j^{-1}(x)) = F_h(j^{-1}(x)) = \int_{\infty} f_h(j^{-1}(x))dx = j^{-1}(x)$$

Если возьмем обратную функцию по отношению к f и подставим в нее η, то будем получать $j^{-1}(x)$. Требуется получить числа с показательным законом распределения.

$$f_z(x) = l e^{-lx}$$

$$F_z(x) = \int_0^x l e^{-lx} dx = \Big|_0^x -\frac{1}{l} l e^{-lx} = 1 - e^{-lx}$$ - функция распределения вероятности.

Подставив в F случайную величину z, получим число равномерно распределенное от 0 до 1.

$$1 - e^{-\frac{lz}{i}} = h_i$$

$$1 - h_i = e^{-\frac{lz}{i}}$$

$$z_i = -\frac{1}{l} \ln h_i$$

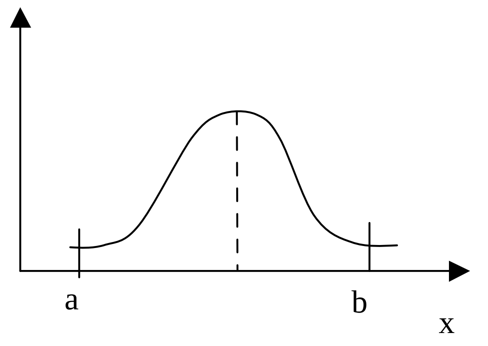
Проблемы:

1. $\int f_z(x)$ не берется либо результат получается неудобным для вычисления.
2. Функция плотности вероятности представляется экспериментально полученной гистограммой.

В этих случаях прибегают к универсальному методу.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕТОД

Пусть требуется сформировать последовательность случайных чисел имеющую $f_z(x)$. Если функция не ограничена в области применения, то ее ограничивают интервалом (a,b).



Интервал ab разбивается на n подинтервалов. Разбиение осуществляется так, чтобы вероятность попадания случайной величины в любой из подинтервалов было постоянной величиной.

$$P_k = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_x(x)dx = \frac{1}{n}$$

$$(a_0 a_i)(a_1 a_2)...(a_{n-1} a_n)$$

Случайная величина выходной последовательности формируется, как:

$$x_i = a_k + h^*$$

Где h^* – число равномерно распределенное в интервале от 0 до (a_{k-1}-a_k).

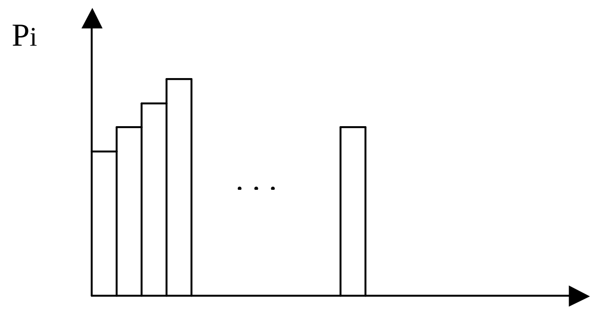
Алгоритм:

1. Генерируется число h_{1i} равномерно распределенное от 0 до 1. С его помощью выбирается номер одного из поддиапазонов k.
   $k \le h_{1i} \cdot n < k+1$
2. Генерируется число h_{2i} равномерно распределенное от 0 до 1. Формируется число выходной последовательности $x_i = a_k + (a_{k+1} - a_k)h_{2i}$.
   $(a_{k+1} - a_k)$ - длина участка.

Если функция плотности распределения в виде экспериментальной гистограммы применяют модифицированный универсальный метод.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ УНИВЕРСАЛНЫЙ МЕТОД

Предположим, что ф-я плотности задана в виде гистограммы:



Интервалы все равны между собой. В этом случае мы предварительно переходим к шкале $0, a_1, a_2, a_3 ... 1$.

$$a_k = \sum_{i=1}^{k} P_i$$

Алгоритм:

1. Генерируется число h_{1i} равномерно распределенное от 0 до 1. С его помощью выбирается номер одного из поддиапазонов шкалы a. Тем самым определяем номер поддиапазона k.
2. Генерируется число h_{2i} равномерно распределенное от 0 до 1 и с его помощью формируем число выходной последовательности $x_i = a_k + (a_{k+1} - a_k)h_{2i}$.

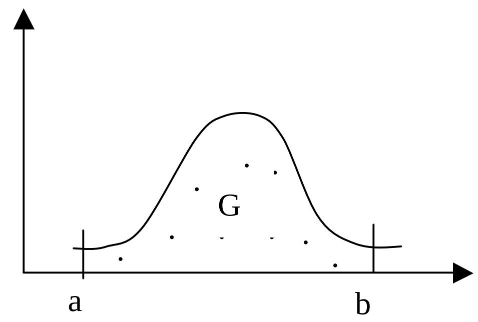
Если функция плотности задана аналитически $f_x(x)$, то шкала строится

$$S_i = \frac{a_n - a_0}{n} \cdot \frac{f_{i+1}(x) + f_i(x)}{2}$$

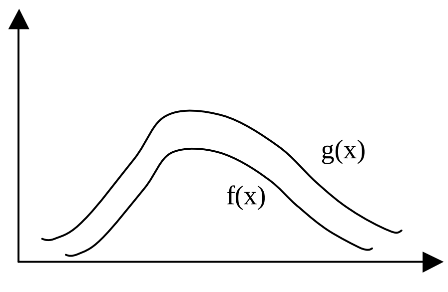
Используя площади мы строим a шкалу.

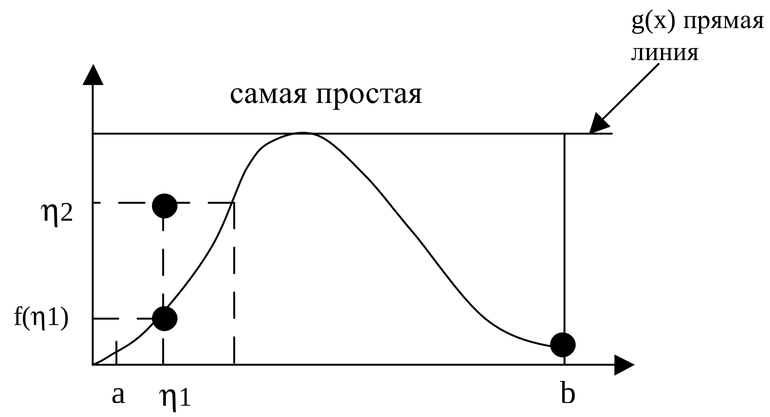
МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ (ОТБРАКОВКИ, РЕЖЕКЦИИ, ФОН НЕЙМАНА)

Этот метод базируется на следующем утверждении: если множество точек с координатами (x,y) представляют собой реализацию случайного вектора (x,h) равномерно распределенного в области между осью 0x и графиком функции f(x) такой, что $\int f(x)dx = G < \infty$ (G – площадь), то одномерная функция плотности распределения координаты x будет равна: $j_x(x) = \frac{f(x)}{G}$



Для того чтобы можно было использовать этот метод используют следующее: если точки x, y представляют собой реализацию случайного вектора равномерно распределенного в области между 0x и функцией g(x), то та часть реализации, которая попадает в область под графиком функции f(x) такой что f(x)<=g(x) во всей области распределения будет тоже равномерно распределена. g(x) – мажорирующая функция.





Самый простой случай: g(x)=const. Обычно выбирают g(x)=f_{max}(x).

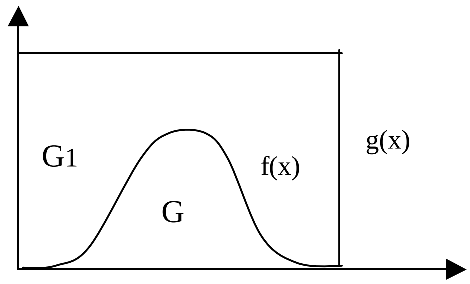
Алгоритм:

1. Ограничиваем f(x) интервалом a,b исходя из точности (если ф-я не ограничена).
2. Генерируем число h_{1i} равномерно распределенное от a до b.
3. Генерируется число h_{2i} равномерно распределенное от 0 до f_{max}(x).
4. Осуществляется проверка h_2<=f(h_1). Если условие выполняется, то число посылается в выходную последовательность.

Как правило, оперировать приходится с числами базовой последовательности от 0 до 1. Для упрощения процедуры генерации: от случайной величины x переходят к величине $x^* = \dfrac{x-a}{b-a}$. Т.о. область возможных значений будет от 0 до 1. Теперь сожмем по вертикали. $f^*{}_{x^*} = \dfrac{f_x(z)}{f_{\max}}$. $f^*{}_{x^*} = (b-a) f_x(a+(b-a)z)$

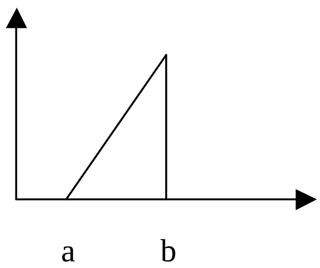
Теперь мы ввели ее в единичный квадрат.

1. Генерируем пару РРСЧ (0,1) h_i, h_{i+1}.
2. Проверяется условие $h_{i+1} \le \dfrac{(b-a) f_x(a-(b-a)h_i)}{f_{\max}}$. Если условие выполняется, то формируется число: $x_j = a+(b-a)h_i$

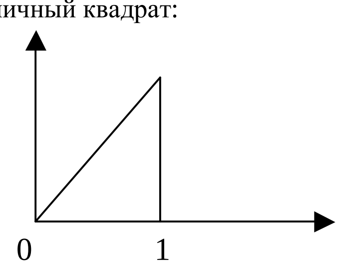


т.о. эффективность можно определить коэффициентом $k = \dfrac{G}{G_1}$, чем ближе к 1, тем больше эффективность.

Пример использования метода:
Требуется разработать алгоритм получения чисел с треугольным распределением.



Масштабируем эту функцию в единичный квадрат:



h_1, h_2

если $h_1 > n_2$, то в выходную последовательность включается число $a+(b-a)h_1$.

Модифицированный алгоритм с использованием 2х точек (h_1, h_2) и (h_2, h_1) мы в любом случае получим выходное значение.

$x_j = a+(b-a)\max(h_1, h_2)$, КПД=100%.

ФОРМИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$$

Для генерации чисел используется центральная предельная теорема: сумма N одинаково распределенных случайных чисел, каждое из которых имеет матожидание m_1 и среднеквадратичное s_1 при увеличении N стремиться к нормальному закону распределения с математическим ожиданием $m = \overline{N} m_1$ и средним квадратичным $s = s_1\sqrt{N}$.

Генератор чисел с нормальным законом распределения:

$$\begin{cases} m = N\dfrac{b+a}{2} \\ s = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}\sqrt{N} \end{cases}$$

Алгоритм выглядит следующим образом:

$$x = \sqrt{\frac{12}{N}}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i - \frac{N}{2}\right),\ m = 0,\ s = 1$$

Если надо получить числа с заданным m\` и $s$\`, то $m^* = m\grave{} + s\grave{}x$.

Для улучшения качества чисел при использовании этих формул:

$$x^* = x - \frac{41}{13440N^2}\cdot(x^5 - 10x^3 + 15x)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

$$P_m = \frac{l^m}{m!}e^{-l}$$

Теорема: если производится N независимых опытов и вероятность события A в каждом из этих опытов равна p, то частота появления m событий в N опытах сходится по вероятности к величине P_m.

Алгоритм:

1. Выбирается $p = \frac{l}{N} < 1$.
2. Производятся опыты по N испытаний, в каждом из которых проверяют выполнение условия $h_i < p$ (h_i - РРСЧ (0, 1))
3. Подсчитывают количество y_j выполнения таких событий. Числа y_j будут распределены по закону Пуассона.

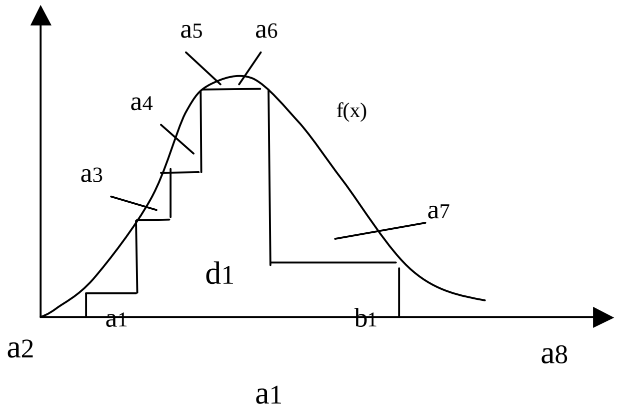
Метод Канна:

Формируется произведение $\prod_{j=1}^{N_j} h_j$ равномерно распределенных чисел g_0 и выполняется условие:

$$\prod_{j=1}^{N_j} h_j < e^{-l}$$

Метод композиции

Если вид функции плотности распределения неудобен для использования рассмотренных ранее методов.



Суть метода в разбиении фигуры, образованной графиком f(x) на произвольное число непересекающихся областей a_j. Они выбираются так, чтобы их форма позволяла использовать традиционные методы формирования случайных величин.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j j_j(x)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_j = 1$$

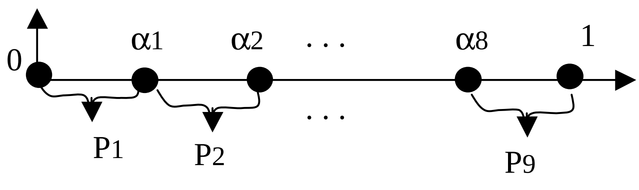
$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} P_j j_j(x)$$

$j_j(x)$ - условные функции плотности распределения и значение ординат этих функций, полученные делением отрезков вертикальных прямых на значение P_j.

В результате разбиения мы получаем ряд функций плотности

1. $a_1,\ j_1$
2. $a_2,\ j_2$
3. $a_9,\ j_9 = \dfrac{f(x) - \sum_{j=1}^{8} P_j j_j}{1 - \sum_{j=1}^{8} P_j}$

На первом этапе получаем значение случайной величины j, закон распределения которой определяется P_1, $P_2 \ldots P_9$.



Берем РРСЧ и бросаем на эту шкалу. Выбираем область. По известным алгоритмам мы получаем число в выходную последовательность. Самой большой фигуре должен соответствовать самый простой метод.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Случайные события формируются на основе РРСЧ.

- Простое случайное событие A с вероятностью P_a. Будем определять наступление события A, как выполнение условия: $h \le P_a$. h - РРСЧ (0,1).
- Полная группа несовместных случайных событий.
  $A_1, A_2, \ldots, A_n$
  $P_1, P_2, \ldots, P_n$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = 1$$

Будем определять наступление события A_k, как выполнение следующего условия:

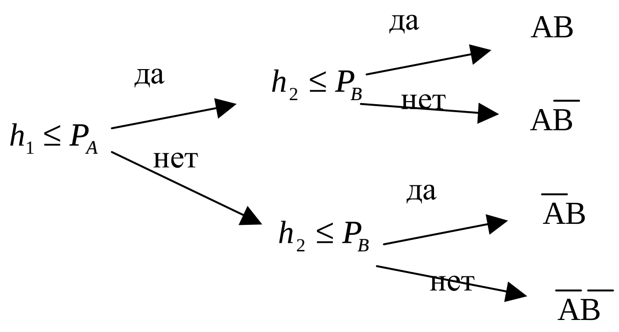
$l_{k-1} < h \le l_k$, где $l_k = \sum_{i=1}^{k} P_i$

- Сложные события (зависят от простых).

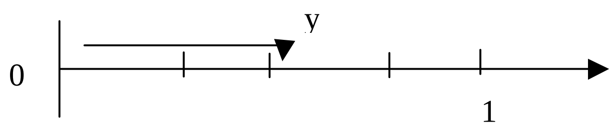
1. Независимые простые события

A	B
P_A	P_B
AB	$P_A P_B$
$A\overline{B}$	$P_A(1-P_B)$
$\overline{A}B$	$(1-P_A)P_B$
$\overline{AB}$	$(1-P_A)(1-P_B)$

Метод с генерацией 2х чисел:

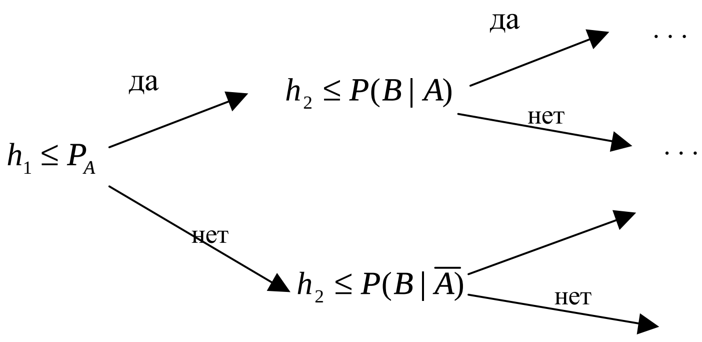


Метод с генерацией 1 числа



2. Зависимые простые числа

Надо знать условную вероятность P(B\A) (вероятность B при условии A).



$$P_B = P_A P(B \setminus A) + (1-P_A)P(B \setminus \overline{A})$$

$$P`(B \setminus A) = \frac{P_B - P_A P(B \setminus A)}{1-P_A}$$

ФОРМИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Можно задать совокупностью случайных значений координат. Если координаты независимы, то это формирование 2х СЧ. Если корреляция (зависимы), то уже сложнее.

1. Дискретный случайный процесс.

x - случайная величина. $x_1 x_2 \ldots x_n$

h $y_1 y_2 \ldots y_n$

Для описания закона случайной величины зададим матрицу вероятностей:

$$P = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1k} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2k} \\ & \ldots & & \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nk} \end{vmatrix}$$

$P_j = \sum_{j=1}^{k} P_{ij}$ - вероятность появления 1й координаты.

Просуммируем значения вероятностей по всем строкам. На первом этапе надо получить равномерный закон распределения для 1 координаты. Рассматривая как полную группу несовместных событий

Нам потребуется условное распределение вероятности для 2й координаты:

$$P_{j/i} = \frac{P_{ij}}{P_i}$$

Аналогично разыгрываем 2ю координату.

2. Для непрерывного процесса

$$F_{xh}(x, y) = P(x < x; h < y)$$

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xh}(x, y) dy \qquad (x_i)$$

$$f_h(y / x_i) = \frac{f_{xh}(x_i, y)}{f_x(x_i)} \qquad (y_i)$$

Если координат больше, то

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dy dz$$

СОЗДАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИМИТАЦИОНЫХ МОДЕЛЕЙ

Допущения:

1. Представление потоков заявок, как простейших.
2. Предположение о показательном законе времени обслуживания.
3. Однородность потока.
4. При использовании аналитических моделей невозможно обслуживание одной заявки несколькими каналами.
5. При моделировании сетей аналитический подход становится невозможным при наличии сети более трех подсистем.

Применение имитационных моделей целесообразно в следующих случаях:

- Если создание аналитической модели не представляется возможным либо использование аналитики затруднительно в вычислительном плане.
- Если необходимо наблюдать за наблюдением модели или ее отдельных частей в течение определенного периода времени.
- Если необходимо исследовать поведение объекта в новых условиях или при введении новых компонент в структуру модели.

Математической базой служит следующие предельные теоремы:

Теорема Бернулли: при неограниченном увеличении числа опытов, частоты появления событий стремятся к вероятности этих событий.

Теорема Чебышева: при неограниченном увеличении числа испытании средние значения случайных величин стремятся к их математическим ожиданиям.

Центральная предельная теорема: суммы независимых случайных величин, имеющих одно и то же распределение, имеют распределение сколь угодно близкое к нормальному закону распределения.

1. ***Формулирование проблемы.***
2. ***Определение границ системы.***
3. ***Формулирование модели.*** *Этап перехода от реальной системе к логической схеме.*
4. ***Подготовка данных.***

5. ***Создание модели.***
6. ***Стратегическое планирование.***
7. ***Тактическое планирование.***
8. ***Эксперимент.***
9. ***Оценка полезности (интерпретация) результата.***

УПРАВЛЕНИЕ МОДЕЛЬНЫМ ВРЕМЕНЕМ

3 ВИДА ВРЕМЕНИ:

1. Реальное время (в котором функционирует реальный объект).
2. Модельное время (системное) – время, в масштабе которого воссоздаются в модели процессы реального мира.
3. Машинное время – затраты времени на выполнение программы.

Основные задачи, которые решаются с помощью аппарата модельного времени:

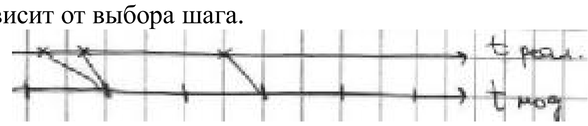
1. Отображение переходов объекта из состояния в состояние.
2. Синхронизация работы составных частей модели.
3. Организация квазипараллельной обработки событий.

Существует 3 основных метода управления модельным временем:

1. Метод постоянного шага (метод ΔT).
2. Метод особых состояний (метод sZ).
3. Метод последовательной проводки заявок.

Выбор метода определяется сложностью модели, характеристиками исследуемых процессов, предъявляемыми требованиями точности…

1. Метод постоянного шага ΔT . Отсчет системного времени производится через фиксированный интервал времени ΔT . При изменении этого времени (при увеличении) просматриваются все составные части моделируемой системы и смотрится, произошло ли изменение состояний и производится соответствующая обработка. При такой организации события считаются наступившими при окончании очередного интервала ΔT . Точность результата зависит от выбора шага.



Обычно этот метод используют когда:

- События наступают регулярно и их расположение во времени достаточно равномерно.
- Число событий велико и моменты их наступления близки между собой.
- Моменты наступления событий трудно предсказать.

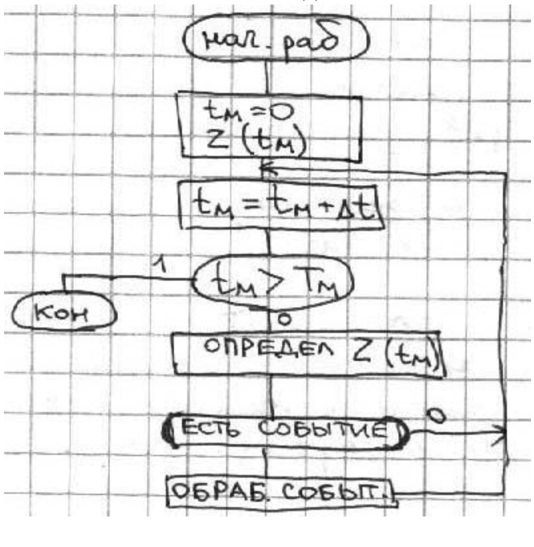
Достоинства: метод прост в реализации.

Недостаток: очень не экономичен с т.зр. расходования машинного времени.

Выбор шага вещь довольно субъективная, но, как правило:

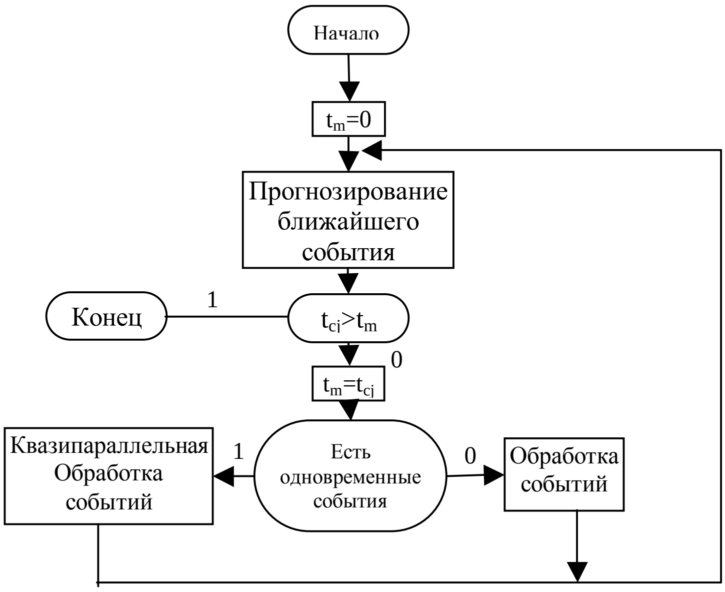
- Принимают ΔT исходя из интенсивности возникновения событий разных типов.
- Выбирают ΔT равным среднему интервалу времени между наиболее важными или наиболее часто встречающимися событиями.

Алгоритм работы программы с использованием этого метода:



2. Метод особых состояний (sZ). Он основывается на том, что модельное время изменяется каждый раз до момента наступления очередного события. Этот метод сложнее в реализации, т.к. приходится строить так называемые календари событий и поддерживать эти календари. Метод позволяет экономить машинное время и обеспечивает большую точность, чем ΔT . Используется:
   - События определены во времени неравномерно или интервалы между событиями велики.
   - Предъявляются повышенные требования к точности определения взаиморасположения событий во времени.
   - Если необходимо производить квазипараллельную обработку событий.

   Алгоритм:



3. Метод последовательной проводки заявок. При построении модели иногда удобно строить алгоритм по принципу, идея которого состоит в следующем: последовательно воспроизводятся истории отдельных заявок в порядке их поступления. Алгоритм обращается к другим заявкам только в тех случаях, если это необходимо для решения вопроса о дальнейшем обслуживании данной заявки. Такого рода алгоритмы экономичны – они не требуют специальных мер для учета особых состояний.

Пример с использованием метода проводки заявок: одноканальная система с неограниченной очередью и нетерпеливыми заявками.

В систему заявки поступают с $\overline{t_n}$.

$\overline{t}_o$ - обслуживание.

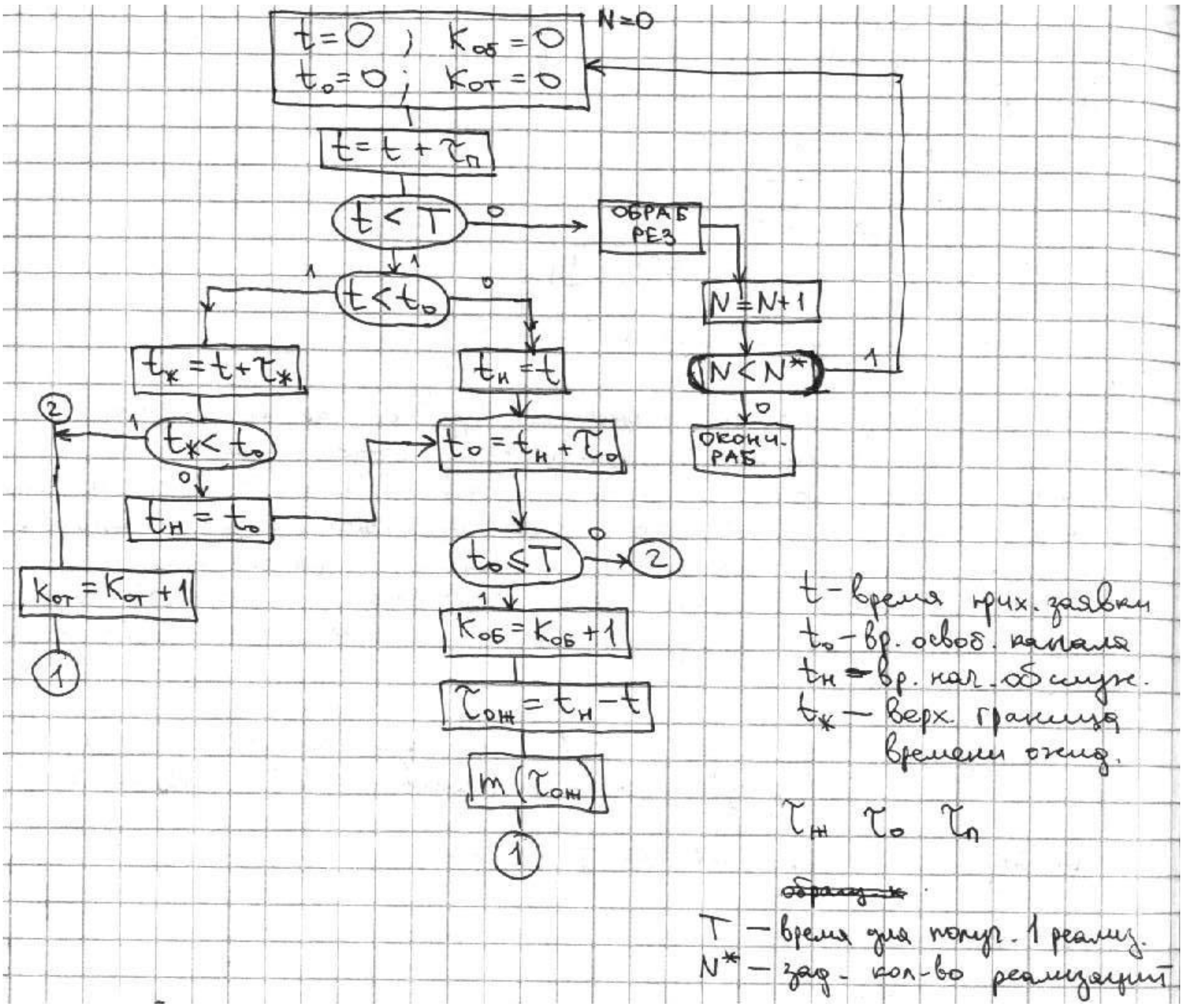
$t_{ж}$ ожидание, после чего получает отказ.

$\overline{t}_{от}$ - ?. Для обслуженных заявок.

$P_{отк}$ - ?. Вероятность отказа.

Это все случайные величины со своими законами распределения.

Определить среднее время ожидания заявки очереди для тех заявок, которые обслужились и вероятность отказа.



ПЛАНИРОВАНИЕ МАШИННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Планирование эксперимента преследует 2 основные цели:

1. Сокращение общего объема испытаний при соблюдении требований к достоверности и точности их результата.
2. Повышение информативности каждого эксперимента в отдельности.

Факторы – это множество внешних и внутренних параметров модели, значение которых экспериментатор может контролировать в ходе подготовки и проведения эксперимента. Факторы могут быть количественными и качественными. Множество всех возможных значений факторов образуют **факторное пространство**. Если в ходе эксперимента значения факторов можно изменять, то такой эксперимент – **активный**, иначе – **пассивный**. Основные требования к факторам:

- Управляемость.
- Непосредственность воздействия. Значения факторов должны изменяться не через значения или сочетания значений других факторов.

В большинстве случаев при планировании экспериментов моделируемая система воспринимается, как черный ящик, на входе которого присутствуют факторы, а на выходе - множество наблюдаемых переменных (откликов, реакций).

При проведении эксперимента экспериментатор пытается установить связь между реакцией и влияющими на работу системы факторами. Желательно установить связь в аналитической форме.

Можно сформулировать задачу планирования эксперимента, как установление зависимости $y_i = j\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ с минимальными затратами машинного времени и с максимальной точностью. Эту зависимость иногда называют функцией реакции. При проведении определенного эксперимента пытаются установить такую зависимость для одного из откликов. Как правило, заранее вид этой зависимости не известен. Поэтому предварительно делается предположение о виде функциональной зависимости: $y_i = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$. А в ходе эксперимента значения этой функции пытаемся установить.

Различают стратегическое и тактическое планирование. К задачам стратегического относятся:

1. Выбор вида функции отклика (f).
2. Идентификация факторов.
3. Выбор уровней факторов, т.е. построение плана эксперимента.

Совокупность методов установления необходимого объема испытаний для обеспечения требуемой точности и достоверности результата относятся к тактическому планированию эксперимента.

СТРАТЕГИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Наиболее распространенными являются полиномиальные модели. Т.е. зависимость Y от X представляется в виде полинома степени d. В общем случае это выглядит:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i \le j \le n} \sum a_{ij} x_i x_j + \ldots \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

$$\sum i_n \le d$$

Всего значений **a** в этом полиноме c_{d+n}^{d}

Как правило, наиболее частый вид полинома это либо линейный полином $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$, либо неполный квадратичный полином $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{12} x_1 x_2$.

Чем сложнее вид полинома, тем больше испытаний придется провести.

Под идентификацией факторов понимают их ранжирование по степени влияния на значение реакции. При этом разделяют факторы на первичные, в исследовании влияния которых на значение реакции экспериментатор заинтересован в первую очередь и вторичные, не являющиеся целью исследования, но влиянием которых, при проведении эксперимента, нельзя пренебречь.

Установление значений (уровней) факторов производится с учетом 2х противоречивых требований:

- Уровни должны перекрывать весь возможный диапазон изменений факторов.
- Общее число уровней не должно приводить к чрезмерно большому объему моделирования.

Обычно ищут компромисс. Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней всех факторов называется полным факторным экспериментом (ПФЭ). Суммарное число испытаний для ПФЭ: $N=l_1 l_2 \ldots l_n$, где l – уровни фактора.

Использование ПФЭ необходимо если экспериментатор кроме индивидуального влияния отдельных факторов пытается установить и взаимовлияние всех факторов.

Если взаимовлиянием можно пренебречь, то используется так называемый частичный факторный эксперимент (ЧФЭ).

Наиболее широко используются подходы при составлении планов:

1. Рандомизированный план.
2. Латинский план, который строится на основе латинских квадратов. Его использует если один из факторов – первичный, а остальные – вторичные. При построении плана такого рода количество уровней для каждого фактора должно быть одинаково.

   Пример: A – первичный фактор.

   B, C – вторичные факторы.

   Для каждого фактора устанавливается 4 уровня.

	B_1	B_2	B_3	B_4
C_1	A_1	A_2	A_3	A_4
C_2	A_2	A_3	A_4	A_1
C_3	A_3	A_4	A_1	A_2
C_4	A_4	A_1	A_2	A_3

   В каждой строке значение уровня встречается 1 раз.

3. Однофакторный эксперимент. В этом случае один из факторов пробегает все возможные значения уровней при фиксированных значениях уровней других факторов. Это позволяет исследовать влияние каждого фактора в отдельности. Общее число экспериментов: $N = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$.
4. **2^n**. Дробный факторный эксперимент. Используется наиболее часто. Суть построения плана: для каждого фактора устанавливают только 2 уровня: нижний и верхний. Обычно делается это на основе предварительного изучения условий работы моделируемого объекта. Устанавливается номинальный уровень x_0 и определяют шаг варьирования Δx и уже затем определяют минимальное и максимальное значение для данного фактора. Для удобства работы обычно в план закладывают не реальные значения, а нормированные, чтобы максимум соответствовал +1, а минимум -1. Количество сочетаний факторов будет 2^n.

Если выбраны значения уровней для каждого фактора, строится план эксперимента.

$$\begin{array}{c|cccc|}
x_{01} & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\
x_{02} & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\
\dots & & \dots & & \\
x_{0k} & x_{1k} & x_{2k} & \dots & x_{nk}
\end{array}$$

Т.е. каждая строка представляет собой совокупность значений уровня для соответствующего фактора. Количество строк определяется исходя из числа коэффициентов **а** уровня регрессии.

Как правило, план эксперимента является избыточным.

Пример: x_1,x_2,x_3 – 8 строк.

$f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ - не более 4х операций.

Перед началом работы с планом – этот план расширяется до матрицы планирования. Для этого вводится дополнительно столбец фиктивных переменных x_0, значения которых устанавливается равным 1. Столбцы фиктивных переменных, учитывающих взаимовлияние факторов.

$x_{n+1\_1} \quad x_{n+2\_1} \quad \dots \qquad x_{n+r\_1}$

Получаем вектор-столбец значений реакций.

$$\begin{vmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \dots \\ y_{ik} \end{vmatrix}$$

$a_0 + a_1x_{11} + a_2x_{21} + \ldots + a_{k1}x_n + a_{ij}x_ix_j + \ldots = y_1$

Т.е. в итоге, получаем k уравнений с k неизвестными.

5. Сетевые модели. При задании модели этапу программной реализации, как правило, должен предшествовать этап алгоритмизации. Используют представление моделей в виде сетей.

СЕТИ ПЕТРИ

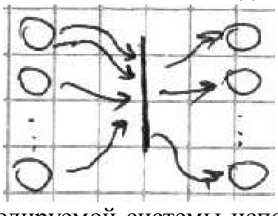
Сети Петри могут быть представлены, как в графическом виде, что обеспечивает наглядность, так и в аналитической форме, что обусловливает возможность автоматизации анализа этих сетей. В графической форме сеть Петри представляет собой граф, состоящий из вершин 2х видов: позиции и переходы, соединенных между собой направленными дугами. При этом дуга может соединять только разнотипные элементы. Такой граф называют двудольный.

Обозначения:

Окружность – позиции.

Линия – переходы.

С содержательной точки зрения переходы соответствуют событиям, которые могут возникать в моделируемой системе, а позиции – условиям возникновения этих событий. Т.о. совокупность переходов, позиций и дуг позволяет описать причинно-следственные связи, присущие моделируемой системе, причем в статике. С каждым переходом связано множество выходных и множество входных позиций.



Для описания динамики работы моделируемой системы используются объекты еще одного типа – фишки (метки). Фишки размещаются в позициях и при работе модели могут перемещаться из позиции в позицию через переходы. Это перемещение называется срабатыванием перехода.

Для срабатывания перехода должны возникнуть условия для его срабатывания. Условие срабатывания перехода – наличие одной фишки в каждой из входных позиций данного перехода.

Для того, чтобы описать в аналитической форме сеть Петри задают обычно следующую пятерку параметров: P=(B,D,I,O,M).

B={b_i} – это множество всех позиций сети.

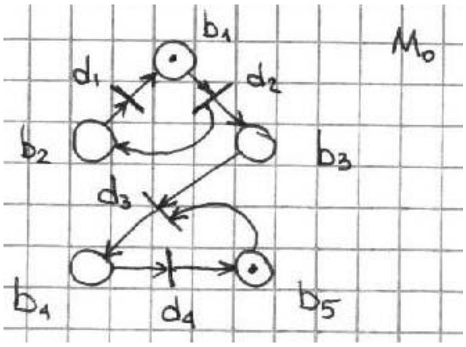
D={d_i} – множество всех переходов сети.

I:B*D->0,1 – входная функция (прямая функция инцидентности), которая определяет множество входных позиций для каждого перехода.

O:B*D->0,1 – выходная функция, которая определяет множество выходных событий для каждого перехода.

M:B->0,1,2… – функция разметки. Она ставит в соответствие каждой позиции некоторое целое неотрицательное число (сколько в какой позиции в данный момент находится фишек). Для начала работы определяется начальная разметка M_0.

Пример:



M_0=(1 0 0 0 1)

При срабатывании перехода из каждой входной позиции изымается по фишке и в каждую выходную позицию по метке добавляется.

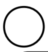
M_1=(0 1 1 0 1)

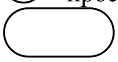
Произведя анализ сетей Петри можно решать следующие проблемы:

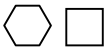
1. Проблема достижимости. В сети с первоначальной разметкой M_0 требуется определить достижима ли разметка M`. С точки зрения исследования моделируемой системы это можно интерпретировать проблему достижения некоторого состояния.
2. Свойство «живости». Под «живостью» перехода понимается возможность его срабатывания в данной сети при первоначальной разметке M_0. Позволяет выявить невозможные состояния в моделируемой системе.
3. Безопасность сети. Безопасной является такая сеть Петри, в которой ни при каких условиях не может появиться больше 1 фишки в любой из позиций. Для исследуемой системы это означает возможность работы системы в стационарном режиме.

Используя сети Петри нельзя исследовать временные характеристики (т.к. время перехода = 0). Дальнейшим развитием сетей Петри являются **E-сети (evaluation).** Отличия от классических сетей Петри:

1. Имеется несколько типов позиций:

 - простая позиция.

 - очередь.

 - разрешающая позиция.

2. Фишки (метки) могут быть снабжены наборами признаков (атрибутов).
3. В каждую позицию может входить и соответственно выходить из нее не более одной дуги.
4. С каждым переходом может быть связана ненулевая задержка и функция преобразования атрибутов.

Т.о. любой переход Е-сети может быть описан следующей тройкой элементов:

$$d_j = (S, L(d_j), z(d_j))$$

S – тип перехода.

$L(d_j)$ – функция задержки (длительность фазы активности срабатывающего перехода)

$z(d_j)$ - функция преобразования атрибутов.

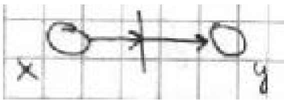
В начальный момент из всех входных позиций изымаются фишки и по завершении фазы активности фишки записываются в выходные позиции. Переход вместе с множеством входных и выходных позиций называется элементарной Е-сетью. Среди входных позиций перехода может присутствовать разрешающая позиция (только одна). Эта позиция выполняет управляющую функцию при срабатывании перехода. Используя разрешающую процедуру можно организовать или ветвление потоков информации или выбор перемещаемых фишек.

Объединяя элементарные Е-сети, можно создавать сетевые модели любой сложности. Объединение Е-сетей происходит путем совмещения выходных позиций одних сетей с выходными позициями других сетей.

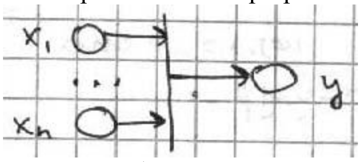
Если происходит перемещение фишки из позиции в позицию с разным размером памяти атрибутов, то если перемещаем в позицию с меньшим размером, то отбрасываются атрибуты справа, если в позицию с большим размером, то добивается нулями.

Все элементарные Е-сети разбиты на 6 базовых типов:

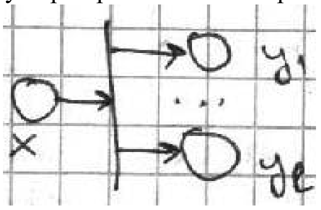
1. Т-переход (1 входная, 1 выходная позиция). Условие срабатывания: наличие фишки в x и отсутствие ее в y. Наличие такой элементарной сети позволяет изобразить занятость устройства в течение некоторого промежутка времени.



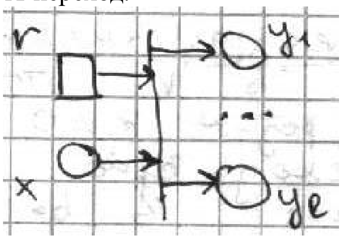
2. J-переход (группа входных позиций и 1 выходная позиция). Все входные позиции содержат по фишке, а выходная позиция свободна. При срабатывании перехода из всех входных позиций изымаются фишки, а в выходную переносится фишка из x_1. С помощью ее можно моделировать условие возникновения некоторых событий при работе объекта.



3. F-переход (одна входная позиция и группа выходных позиций). Наличие фишки в позиции x и свободные y. При срабатывании перехода во все выходные позиции записывается фишка из позиции x.



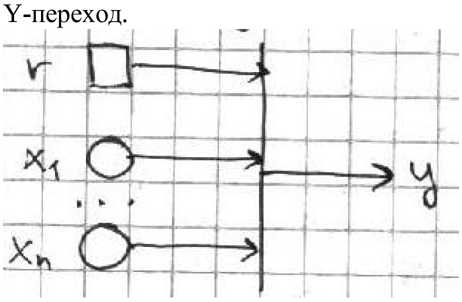
4. X-переход.



Условие: наличие фишки в позиции x. При этом условии вычисляется разрешающая процедура и результат помещается в позицию r. При выполнении разрешающей процедуры получается в качестве результата целое неотрицательное число к. Если позиция y_k пуста, то переход срабатывает и фишка из позиции x переносится в позицию y_k. В том случае, если k=0 или y_k занята, то номер перехода помещается в специальный список (очередь ожидания) и после срабатывания любого перехода в большой сети разрешающая процедура повторяется до тех пор, пока к не станет равным 0 или пока y_k не освободится. Это нестандартная процедура

Еще есть стандартная процедура: при наличии фишки в позиции x, позиции y сканируются сверху-вниз и как только встретится свободная позиция y, номер ее записывается в r и происходит срабатывание перехода.

5. Y-переход.



Условие: наличие фишки хотя бы в одной из позиций x и свободная позиция y. Стандартная процедура: если y пуста, то входные позиции сканируются сверху-вниз и если будет обнаружена фишка хотя бы в 1 входной позиции, то номер этой позиции помещается в позицию r и переход срабатывает. Нестандартная процедура: вычисляется разрешающая процедура и результат записывается в позицию r (это некоторое число от 0 до r). Если вычисленный результат k не равен 0 или $x_к$ содержит фишку, то переход срабатывает и фишка вместе с атрибутами переносится в выходную позицию. Если k=0 или x_k пуста, то номер перехода помещается в очередь ожидания.

6. I-сеть (сеть прерывания) (2 входных, 2 выходных позиции).

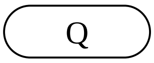
X_1 - основная позиция, x_2 – прерывающая. Наличие такого перехода позволяет осуществить прерывание фазы активности срабатывающего перехода. Переход может сработать в 1 из 2х случаев:

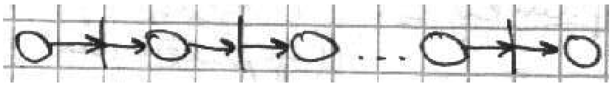
1. x_1 содержит фишку, а все остальные позиции пусты. При этом условии происходит срабатывание перехода x_1->y_1. Если в фазе активности в позиции x_2 появляется фишка, то фаза прерывается и фишка из x_1 помещается в y_1 а их x_2 в y_2.

2. x_2 содержит фишку, а x_1 и y_2 свободны. Независимо от содержимого y_1 переход срабатывает и переход и фишка переносится из x_2 в y_2 с нулевой задержкой.

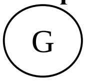
Все переходы в Е-сетях обладают свойством безопасности. Но при построении больших моделей такие ситуации бывают необходимыми. Т.о. при построении Е-сетей выделяют макропозицию (макропереход).

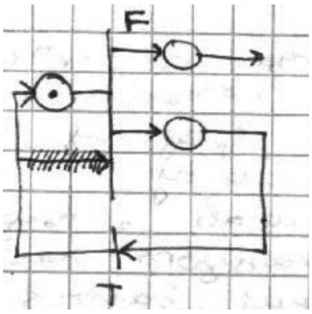
Очередь



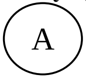


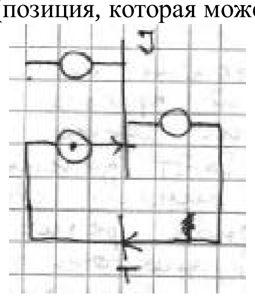
Генератор





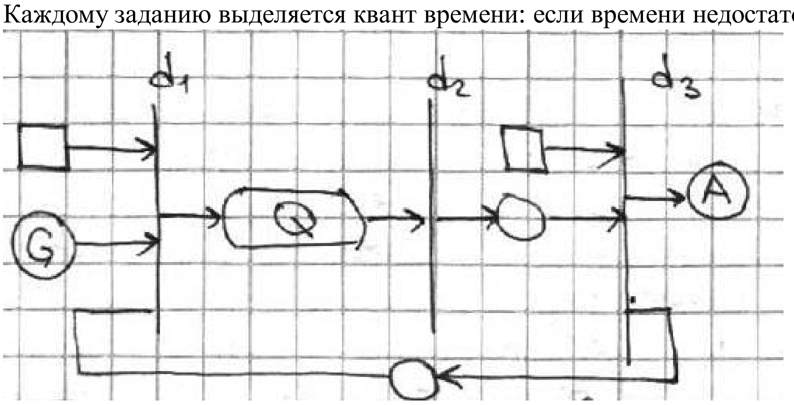
Аккумулятор (позиция, которая может поглощать фишки).





Пример 1:

Каждому заданию выделяется квант времени: если времени недостаточно, то задание покидает систему.



d_1 – постановка заданий в очередь.
d_2 – выполнение задания в течение кванта времени.
d_3 – анализ завершенности выполнения заданий.

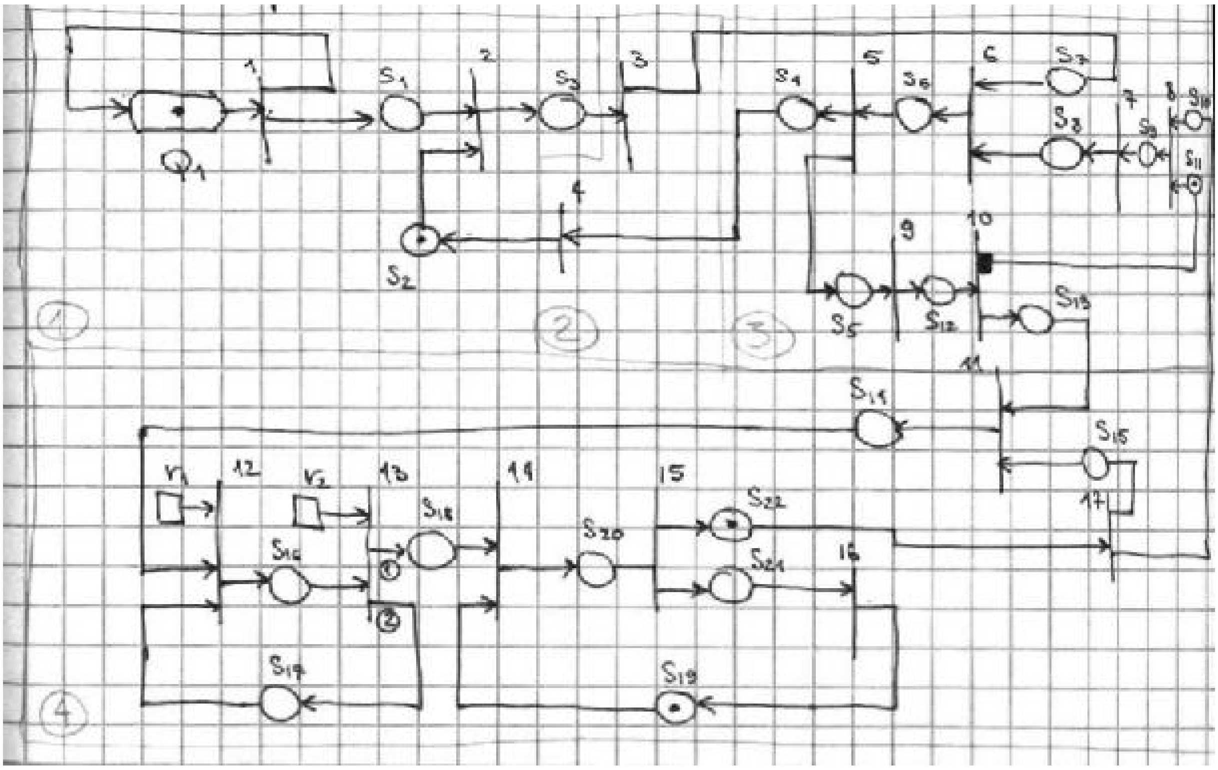
Условные переходы d_1, d_3 позволяют смоделировать интервалы времени поступления и обработки заявок.

Пример2:

Модель распределенной обработки информации. Модель связи с удаленным абонентом. Система должна обеспечивать формирование потоков байт, последовательную передачу их по линии связи удаленному абоненту, прием байтов абонентом с выдачей уведомления о приеме каждого байта, отображение байт на терминале.

Процесс передачи начинается только после сигналов уведомления по завершении приема предыдущего байта. Одновременно с началом передачи может начаться генерация следующего байта. Байт данных, посланный абоненту, после прохождения им линии связи временно запоминается в буферном регистре. После завершения вывода ранее принятого байта на терминал с помощью системы отображения последний байт извлекается из буферного регистра и вслед за этим формируется сигнал уведомления и направляется передающей стороне. С этого момента байт обрабатывается с помощью процесса отображения, который проверяет готовность терминала к восприятию очередного байта и в случае готовности обеспечивает вывод байта на терминал и формирует сообщение процессу приема о возможности выборки из буферного регистра следующего байта.

Можно выделить 4 процесса: формирование байтов, передача, прием, отображение.



S_7 – переданный байт попал в буферный регистр.
S_{10} – предыдущий байт выведен на терминал.
S_8 – процесс отображения готов выбрать байт из буферного регистра.
S_{11} – процесс приема вернулся в исходное состояние и ждет сообщения от процесса отображения.
S_{15} – процесс отображения готов к приему байта из буфера.

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

a – параметр
$\tilde{a}$ - оценка
$x_1, x_2, \dots x_n$ – случайные величины

тогда $\tilde{a} = \tilde{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - также случайная величина
характеристики: мат. ожидание, дисперсия, среднее квадратичное и т.д.

Требования к оценке:

1. $\tilde{a}$ - называется самостоятельной, если при увеличении значения m она сходится к значению a.
2. $\tilde{a}$ - называется несмещённой, если $M[\tilde{a}] = a$.
3. $\tilde{a}$ - эффективна, если $D[\tilde{a}] = \min$.

Оценка для мат. ожидания и дисперсии.

X – случайная величина, и m, D – её теоретические значения
$x_1, x_2, \dots x_n$ - реализации этой случайной величины
тогда для $\tilde{m}$ есть смысл использовать величину среднего арифметического

$$\tilde{m} = m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\tilde{m}$ - состоятельна
$\tilde{m}$ - несмещённая

$$M[\tilde{m}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = m$$

$D[\tilde{m}] = \frac{1}{n} D$

Оценка для дисперсии.

Можно использовать для оценки D т.н. статическую дисперсию

$$D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m})^2$$

D^* - сходится по вероятности к D

Другими словами, состояние

$M[D^*] = \frac{n-1}{n} D$ - оценка является смещённой. Это смещение можно устранить, используя следующую оценку

$$\tilde{D} = \frac{n-1}{n} D^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m})^2$$

$\frac{n-1}{n}$ - поправка Бесселя

Для $\tilde{D}$ можно использовать равноценную формулу:

$$\tilde{D} = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^2 - \tilde{m}^2\right]$$

Формулы при построении имитационных моделей:

$$\tilde{m}_n = \tilde{m}_{n-1}\frac{n-1}{n} + \frac{x_n}{n}$$

$$\tilde{D}_n = \tilde{D}_{n-1}\frac{n-2}{n-1} + \frac{1}{n}(x_n - \tilde{m}_{n-1})^2$$

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ И ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Пусть для а получена $\tilde{a}$. Зададим достаточно большую вероятность b, такую, что событие с такой вероятностью можно считать достоверным. Найдем такую e, что:

$$P(|\tilde{a} - a|) < e) = b$$

$$P(\tilde{a} - e < a < \tilde{a} + e) = b$$

x, m_x, D_x, то для любого e выполняется неравенство Чебышева:

$$P(|x - m_x| \geq e) \leq \frac{D_x}{e^2}$$

$e = t_b s_x = t_b\sqrt{D_x}$, где $t_b = \arg\Phi^*(\frac{1+b}{2})$ (из таблиц).

ТОЧНОСТЬ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА РЕАЛИЗАЦИЙ

Пусть целью моделирования будет вычисление вероятности появления события А. В каждой из N реализаций событие А может произойти, а может и нет. Иначе, количество появления события А в 1 реализации есть случайная величина x, которая может принимать значения x_1=1 (P) и x_2=0 (1-P).

Матожидание этой величины:

$$M[x] = x_1 P + x_2 (1-P) = P$$

$$D[x] = (x_1 - M[x])^2 P + (x_2 - M[x])^2 (1-P) = P(1-P)$$

В качестве оценки для вероятности в соответствии с теоремой Чебышева, можем взять частоту появления этих событий.

$\frac{m}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ (m – сколько раз событие наступило).

В силу центральной предельной теоремы:

$\frac{x_i}{N} = a_i$, тогда $M[a_i] = \frac{1}{N}P + \frac{0}{N}(1-P) = \frac{P}{N}$

Т.о. $\sum \frac{P}{N}$ - нормальный закон распределения.

$$M[\frac{m}{N}] = N \cdot M[a_i] = P$$

$$D[a_i] = \frac{1}{N^2} = (1-P)^2 P + \frac{1}{N^2}(0-P)^2 (1-P) = \frac{P(1-P)}{N^2}$$

$$D[\frac{m}{N}] = N \cdot D[a_i] = \frac{P(1-P)}{N}$$

Последнее – дисперсия чистоты.

$e = t_b \sqrt{D[\frac{m}{N}]}$ или $e = t_b \sqrt{\frac{P(1-P)}{N}}$

Следовательно: $N = t_b^2 \frac{(1-P)P}{e^2}$

Пример: N_0=50-100

$P = \frac{m}{N_0}$ - проводятся опыты и получается первоначальная оценка.

Если целью исследования является N, то используется следующее выражение:

$$N \geq t_b^2 \frac{\tilde{D}}{e^2}$$

Для дисперсии:

$$N \geq 2t_b^2 \frac{\tilde{D}^2}{e^2}$$